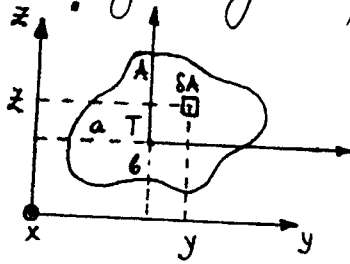


# Површина

$A$  - ознака за површина  $[m^2, cm^2]$



$$A = \int_A dA = \sum A_i$$

$$a = \frac{S_x}{A} \quad b = \frac{S_y}{A}$$

**ЉУБОМИР/06**

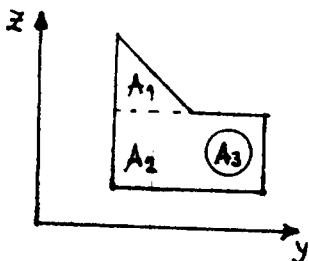
$S$  - ознака за статички момент површине  $[m^3, cm^3]$

Статички момент површина се дефинира у односу на осу  $y$  и осу  $z$ .

$$S_y = \int_A z dA = \sum z_{Ti} A_i \geq 0$$

$$S_z = \int_A y dA = \sum y_{Ti} A_i \geq 0$$

$T$  - тежиште површине



$$A = A_1 + A_2 - A_3$$

$$S_y = A_1 z_1 + A_2 z_2 - A_3 z_3$$

$$S_z = A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_3 y_3$$

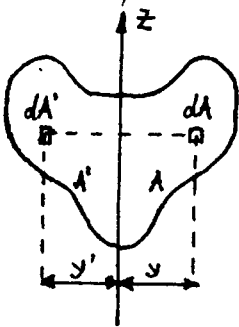
Статички момент једнак је производу површине и растојању  $T$  од осе.

$S_N = 0 \Leftrightarrow N$  је тежишна оса

$$a = y_T = \frac{A_1 y_{T1} + A_2 y_{T2} - A_3 y_{T3}}{A_1 + A_2 - A_3}$$

$$b = z_T = \frac{S_y}{A}$$

• симетрична површ

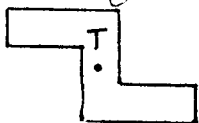


$$S_z^{A'} = -S_z^A$$

$$S^{(A+A')} = S_z^{A'} + S_z^A = 0$$

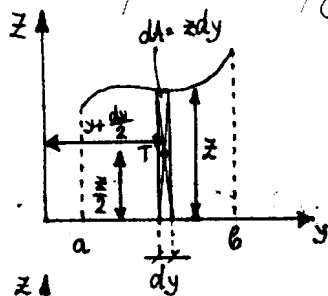
оса симетрије је тежишна оса

• ротациона симетрија



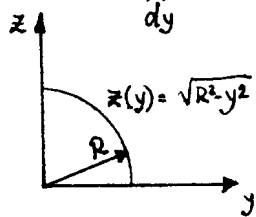
кад се заротира оист иста

• півкільцева крота



$$S_y = \int_A z dA = \int_a^b \frac{z}{2} \cdot z dy = \int_a^b \frac{z^2}{2} dy$$

$$S_z = \int_A y dA = \int_a^b (y + \frac{dy}{2}) z dy = \int_a^b y z dy$$

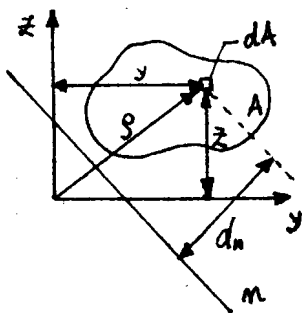


$$S_y = \int_0^R \frac{R^2 - y^2}{2} dy = \frac{1}{2} (R^2 y - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^R = \frac{1}{3} R^3$$

$$z_T = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{1}{3} R^3}{\frac{1}{4} R^2 \pi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}$$

$$z_T^D = y_T^D = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}$$

Моменти інерції



$$\left. \begin{aligned} J_y &= \int_A z^2 dA > 0 \\ J_z &= \int_A y^2 dA > 0 \end{aligned} \right\} \text{аксимальні моменти інерції}$$

$$J_m = \int_A d_m^2 dA > 0$$

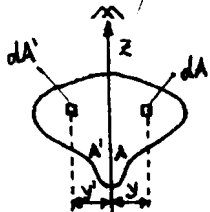
$$J_o = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y > 0$$

(полярні моменти інерції (не залежать від розташування координатної системи))

$$J_{yz} = \int_A yz dA \geq 0 \text{ (центрифугальні моменти інерції)}$$

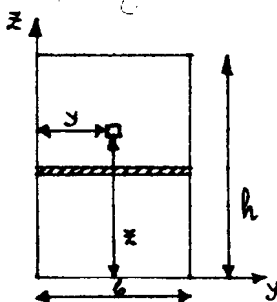
$J$  [м<sup>4</sup>], [см<sup>4</sup>]

• симетрична півкота



$$J_{yz}' = -J_{yz} \Rightarrow J_{yz} = 0$$

• прямокутник



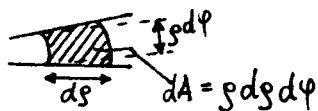
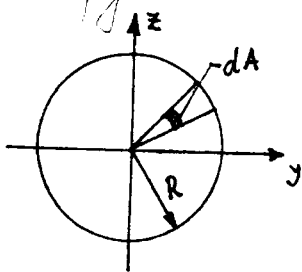
$$J_y = \int_A z^2 dA \Rightarrow \int_0^h z^2 b dz = \frac{z^3}{3} b \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_z = \int_A y^2 dA = \dots = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_{yz} = \int_A yz dA = \int_0^b \int_0^h yz dy dz = \frac{y^2}{2} \Big|_0^b \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^h = \frac{b^2 h^2}{4}$$

$$J_o = \int_A \rho^2 dA = J_y + J_z = \frac{bh^3 + b^3 h}{3}$$

• круї



$$J_0 = \int_A r^2 dA$$

$$J_0 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 r dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi}$$

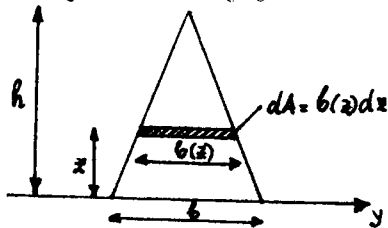
$$J_0 = \frac{R^4 \pi}{2}$$

осе у и z су осе симетрије

$$J_y = J_z = \frac{1}{2} J_0 = \frac{1}{4} R^4 \pi, \quad J_y + J_z = J_0$$

$$J_y = J_z = \frac{R^4 \pi}{4}, \quad J_{yz} = 0$$

• троугао (око једне стране)



$$b(x) = \frac{(h-x)}{h} \cdot b \Rightarrow dA = \frac{h-x}{h} b \cdot dx$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_0^h x^2 \left( \frac{h-x}{h} b \right) dx = \frac{b}{h} \int_0^h \left( x^2 - \frac{x^3}{h} \right) dx = \frac{b}{h} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4h} \right) \Big|_0^h$$

$$J_y = \frac{bh^3}{12}$$

• полукруї



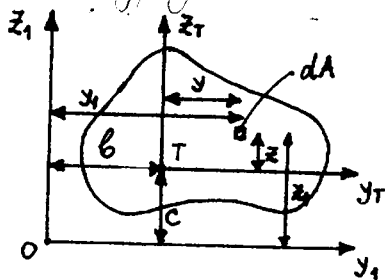
$$J_y^{\Delta} = \frac{1}{2} J_y^{\ominus} = \frac{1}{8} R^4 \pi$$

• четвртинна круїа



$$J_y^{\Delta} = \frac{1}{2} J_y^{\ominus} = \frac{1}{16} R^4 \pi$$

Изрази моменте инерције код транслације координатног система.



$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z + c \\ y_1 &= y + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow J_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA$$

$$J_{y_1} = \int_A (z+c)^2 dA = \underbrace{\int_A z^2 dA}_{J_y} + 2c \underbrace{\int_A z dA}_{S_y=0} + c^2 \underbrace{\int_A dA}_{A}$$

$$J_{z_1} = \int_A (y+b)^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{J_z} + 2b \underbrace{\int_A y dA}_{S_y=0} + b^2 \underbrace{\int_A dA}_{A}$$

$$J_{y_1 z_1} = \int_A (y+b)(z+c) dA = \underbrace{\int_A yz dA}_{J_{yz}} + b \underbrace{\int_A z dA}_{S_z=0} + c \underbrace{\int_A y dA}_{S_y=0} + bc \underbrace{\int_A dA}_{A}$$

Штайнерова теорема

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= J_y + c^2 A \\ J_{z_1} &= J_z + b^2 A \\ J_{y_1 z_1} &= J_{yz} + bc A \end{aligned}$$

— положајни гео

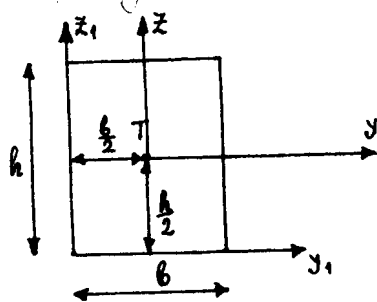
сопствени моменте инерције

Ако знамо моменте инерције у односу на осе које пролазе кроз тежишну тачку фигуре, онда су моменте инерције у односу на произвољне паралелне осе даље претходних једнакости.

Штайнерова теорема користи само ако знамо распоред у односу на тежишне осе.

Сада ћемо помоћу Штайнерове теореме одредити сопствене моменте инерције.

• правоугаоник



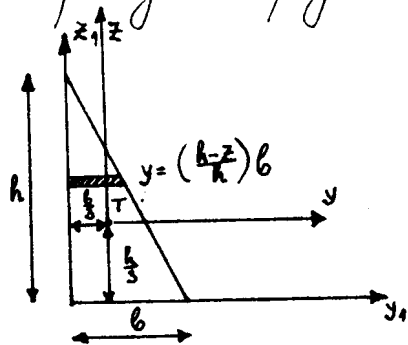
$$J_{y_1} = \frac{1}{3} b h^3 = J_y + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b h$$

$$J_y = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) b h^3 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J_z = \frac{1}{12} h b^3 \quad \left( \begin{array}{l} b \perp z \rightarrow 3. \text{ ситиен} \\ h \parallel z \rightarrow 1. \text{ ситиен} \end{array} \right)$$

$$J_{y_1 z_1} = \frac{b^2 h^2}{4} = J_{yz} + \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot b h \Rightarrow J_{yz} = 0$$

• правоули троугао



$$J_{y_1} = \frac{1}{12} b h^3 = J_y + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b h}{2}$$

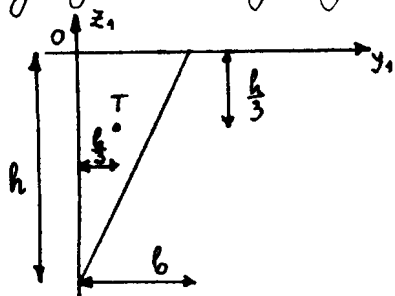
$$J_y = \frac{1}{12} b h^3 - \frac{b h^3}{18} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$J_z = \frac{1}{36} h b^3$$

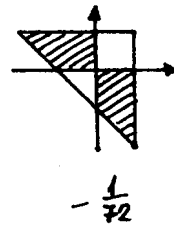
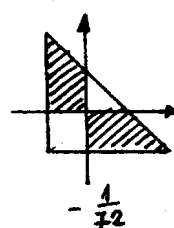
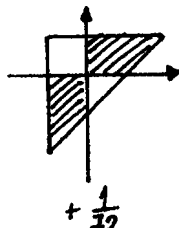
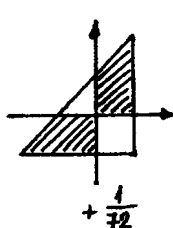
$$J_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \dots = \frac{1}{24} b^2 h^2 = J_{yz} + \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{b h}{2}$$

$$J_{yz} = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{18}\right) b^2 h^2 = -\frac{1}{72} b^2 h^2$$

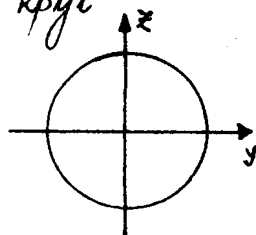
Ако је на већем делу површине фигуре производ координата већи од нуле, тада је и  $J_{yz} > 0$ . У супротном  $J_{yz} < 0$ .



$$J_{y_1 z_1} = -\frac{1}{24} b^2 h^2 = J_{yz} + \frac{b}{3} \left(-\frac{h}{3}\right) \frac{b h}{2} \Rightarrow J_{yz} = \frac{1}{72} b^2 h^2$$



• круг

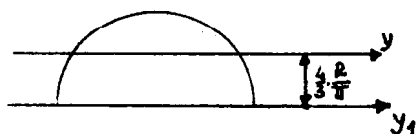


$$J_y = \frac{R^4 \pi}{4}$$

$$J_z = \frac{R^4 \pi}{4}$$

$$J_{yz} = 0$$

• полукруг



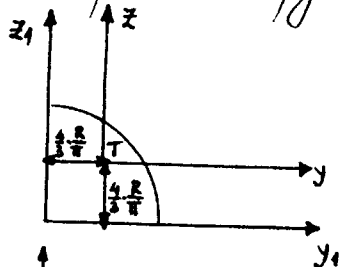
$$J_{y_1} = J_z = \frac{R^4 \pi}{8}$$

$$J_{y_1} = J_y + \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{R^2 \pi}{2}$$

$$J_y = J_{y_1} - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{R^2 \pi}{2} = R^4 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{16}{9\pi} \right) \approx 2 \cdot 0,05488$$

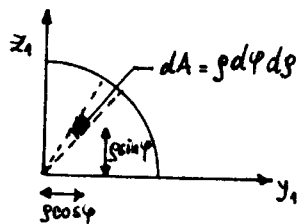
$$J_y = R^4 \cdot 2 \cdot 0,05488$$

• кетивртинна крута



$$J_{y_1} = J_{z_1} = \frac{R^4 \pi}{16} = J_y + \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{R^2 \pi}{4}$$

$$J_y = J_z = R^4 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = R^4 \cdot 0,05488$$



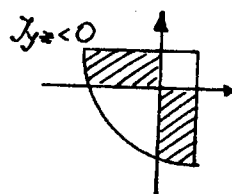
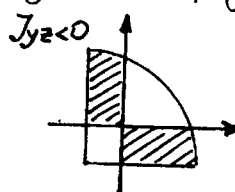
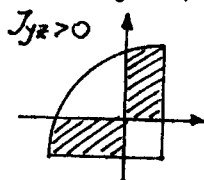
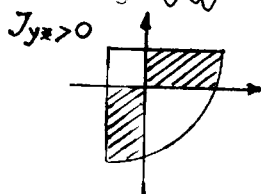
$$J_{y,z} = \int y_1 z_1 dA = \int \int \rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \Rightarrow J_{y,z} = \frac{R^4}{8}$$

$$J_{y,z} = \frac{R^4}{8} = J_{yz} + \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}\right) \cdot \frac{R^2 \pi}{4}$$

$$J_{yz} = R^4 \left( \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right) = R^4 (-0,01647)$$

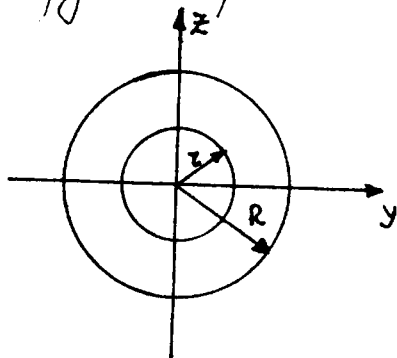
знак одређујемо као код правоуглог троугла.



\* На колоквијуму се очекује да формуле знамо најмање, док је на усменом извештају извођење формула \*

## Сложене фигуре

• кружни прстен

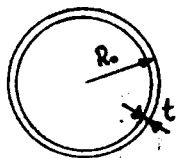


$$J_y = \frac{1}{4} R^4 \pi - \frac{1}{4} r^4 \pi$$

$$J_y = \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \pi$$

$$J_z = J_y = \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \pi$$

$$J_{yz} = 0$$

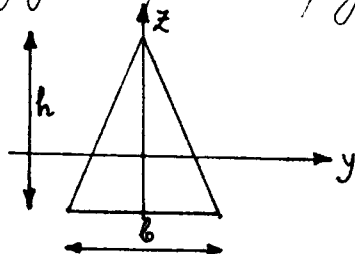


$$R = R_0 + \frac{t}{2}$$

$$r = R_0 - \frac{t}{2}$$

$$J_y = \pi \cdot R_0^3 \cdot t$$

• једнакокрани троугао

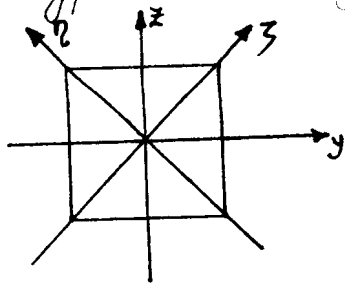


$$J_y^{\Delta} = J_y^{\Delta} + J_y^{\Delta} = \frac{1}{36} \cdot \frac{b}{2} \cdot h^3 + \frac{1}{36} \cdot \frac{b}{2} \cdot h^3 \Rightarrow J_y^{\Delta} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$J_z^{\Delta} = J_z^{\Delta} + J_z^{\Delta} = \left[ \frac{1}{36} h \left( \frac{b}{2} \right)^3 + \left( \frac{b}{6} \right)^2 \frac{b}{2} h \right] \cdot 2$$

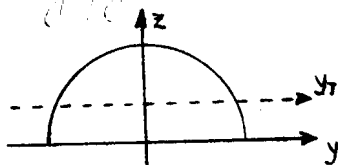
$$J_z^{\Delta} = \frac{1}{48} b^3 h$$

- квадрати (као специјални случај правоугаоника)



$$J_x = J_y = J_z = J_{yz} = \frac{1}{12} a^4$$

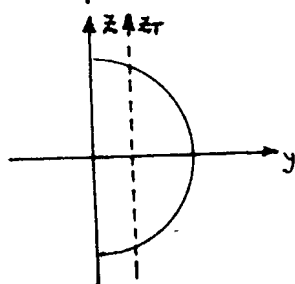
- полукругови



$$J_y = J_z = \frac{1}{8} R^4 \pi \quad J_{yz} = 0$$

$$J_{yz} = \frac{1}{8} R^4 \pi$$

$$J_{yz} = 2 \cdot 0,05488 R^4$$

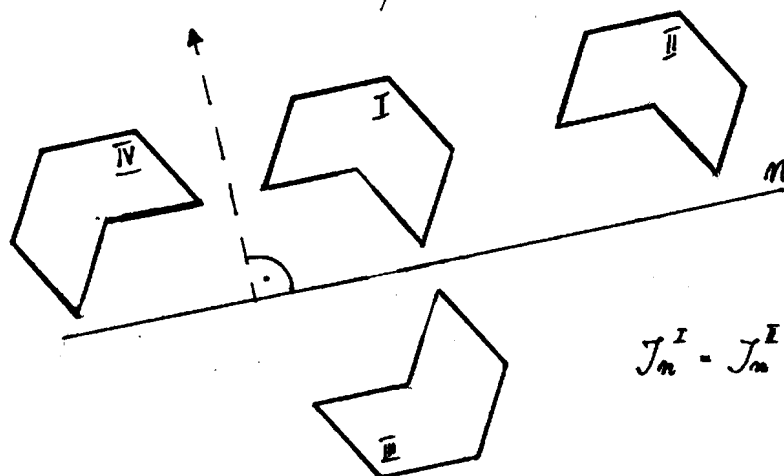


$$J_y = J_z = \frac{1}{8} R^4 \pi$$

$$J_{yz} = 2 \cdot 0,05488 R^4$$

$$J_{yz} = \frac{1}{8} R^4 \pi$$

Формисне особине момента инерције



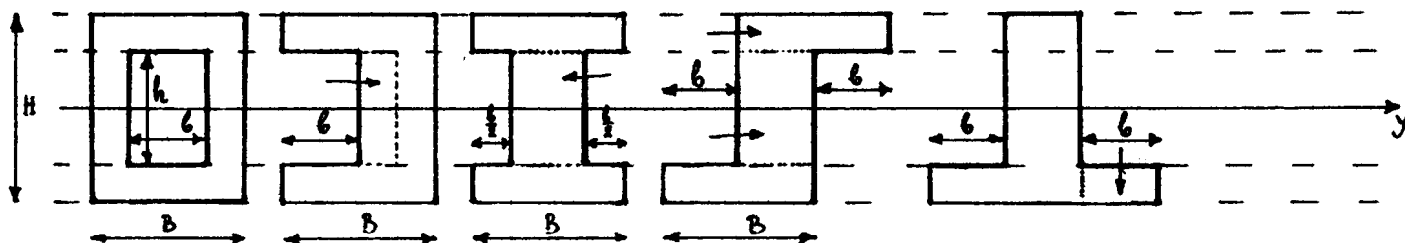
1° трансляција || оси m

2° пресликавање у односу на осу m

3° пресликавање у односу на осу  $\perp$  на m

$$J_m^I = J_m^{II} = J_m^{III} = J_m^{IV}$$

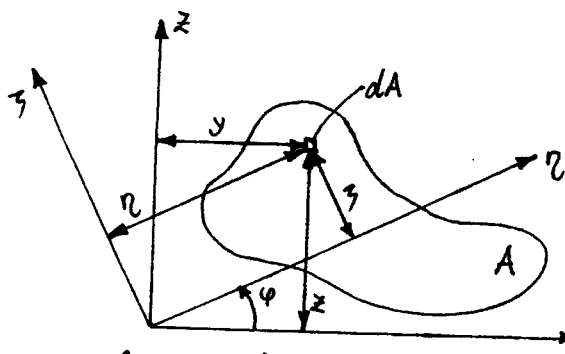
- правоугаоник без унутрашњег правоугаоника



$$J_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

све фигуре имају исто  $J_y$

Промена момента инерције при ротацији координатног система



$$\eta = y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi$$

$$\zeta = -y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi$$

$$J_{\eta} = \int_A \zeta^2 dA = \int_A (-y \sin \varphi + z \cos \varphi)^2 dA = \sin^2 \varphi \cdot \int_A y^2 dA - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A yz dA + \cos^2 \varphi \int_A z^2 dA$$

$$= \cos^2 \varphi \cdot J_y + \sin^2 \varphi \cdot J_z - 2 \sin \varphi \cos \varphi J_{yz}$$

$$J_{\zeta} = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y \cos \varphi + z \sin \varphi)^2 dA = \cos^2 \varphi \int_A y^2 dA + 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A yz dA + \sin^2 \varphi \int_A z^2 dA$$

$$= \cos^2 \varphi \cdot J_z + \sin^2 \varphi J_y + 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi J_{yz}$$

$$J_{\eta\zeta} = \int_A \eta \zeta dA = \int_A (y \cos \varphi + z \sin \varphi) (-y \sin \varphi + z \cos \varphi) dA$$

$$= \sin \varphi \cos \varphi [-\int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA] + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_A yz dA$$

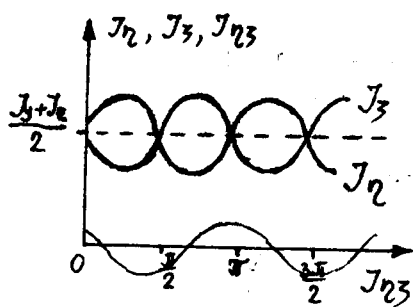
$$= (J_y - J_z) \sin \varphi \cos \varphi + J_{yz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Након скупљања израза, користењем  $\cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ ,  $\sin^2 \varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ , добија се

$$J_{\eta} = \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\varphi - J_{yz} \sin 2\varphi$$

$$J_{\zeta} = \frac{J_y + J_z}{2} - \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\varphi + J_{yz} \sin 2\varphi$$

$$J_{\eta\zeta} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\varphi + J_{yz} \cos 2\varphi$$



$$\frac{\partial J_{\eta}}{\partial \varphi} = \frac{J_y - J_z}{2} \cdot (-\sin 2\varphi) \cdot 2 - J_{yz} \cdot \cos 2\varphi \cdot 2 = -2 J_{\eta\zeta}$$

$$J_{\eta, \max} \Rightarrow \frac{\partial J_{\eta}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-2 J_{yz}}{J_y - J_z} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{-2 J_{yz}}{J_y - J_z}$$

$$\frac{\partial^2 J_{\eta}}{\partial \varphi^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} (-2 J_{\eta\zeta}) < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} (J_{\eta\zeta}) > 0$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha = \frac{-2 J_{yz}}{J_y - J_z} \text{ маћи знак}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} J_{\eta\zeta} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{J_y - J_z}{2} \cdot \sin 2\varphi + J_{yz} \cdot \cos 2\varphi \right) > 0$$

$$2 \left( \frac{J_y - J_z}{2} \cdot \cos 2\varphi + (-J_{yz}) \sin 2\varphi \right) > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{sign}(J_y - J_z) = \text{sign}(\cos 2\varphi) \\ \text{sign}(-J_{yz}) = \text{sign}(\sin 2\varphi) \end{matrix}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 \cdot \text{sign}(\cos 2\alpha)}{\sqrt{1 + (\tan 2\alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z}\right)^2}} = \frac{\frac{J_y - J_z}{2}}{\sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{|\tan 2\alpha| \cdot \text{sign}(\sin 2\alpha)}{\sqrt{1 + (\tan 2\alpha)^2}} = \frac{-J_{yz}}{\sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}}$$

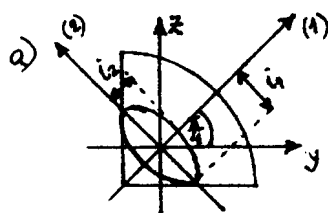
$$J_{\max} = J_z \Big|_{\varphi=\alpha} = \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha$$

$$= \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} \cdot \frac{\frac{J_y - J_z}{2}}{\sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}} - J_{yz} \cdot \frac{-J_{yz}}{\sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}} = \frac{J_y + J_z}{2} + \frac{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}{\sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}}$$

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}, \quad J_1 - \max, \quad J_2 - \min$$

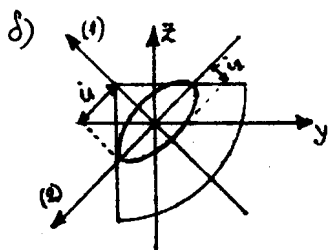
Зад. 1. Одредити главне моменте инерције и правце главних оса за репримну кругу.

Решение: а)



око осе (1) →  $J_{\max}$

око осе (2) →  $J_{\min}$



$$J_y = J_z = 0,05488 R^4 \quad J_{yz} = -0,01647 R^4$$

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2} = 0,05488 R^4 \pm \sqrt{0^2 + (-0,01647 R^4)^2}$$

$$= 0,05488 R^4 \pm 0,01647 R^4 < 0,07135 R^4$$

$$= 0,03841 R^4$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2(0,01647 R^4)}{0} \Rightarrow \sin 2\alpha > 0, \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$J_y = J_z = 0,05488 R^4 \quad J_{yz} = +0,01647 R^4$$

$$J_{1,2} = -11 - \begin{cases} J_1 = 0,07135 R^4 \\ J_2 = 0,03841 R^4 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2 \cdot (+0,01647 R^4)}{0} \Rightarrow \sin 2\alpha < 0, \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4}$$

еллиса инерције

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}} = \sqrt{\frac{m^4}{m^2}} = m \quad (m) \quad [m, \text{cm}]$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}}$$

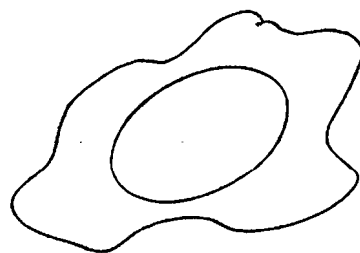
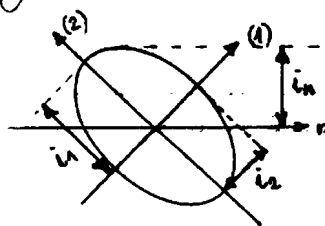
$$i_n = \sqrt{\frac{J_n}{A}} \quad i_n \text{ се наноси у правцу на осу } n$$

Елипса инерције је издужена у оном правцу у којем је издужено число.

Нацртајмо елипсу инерције за претходни задатак

$$i_1^D = \sqrt{\frac{0,07135 R^4}{R^2}} = \dots R$$

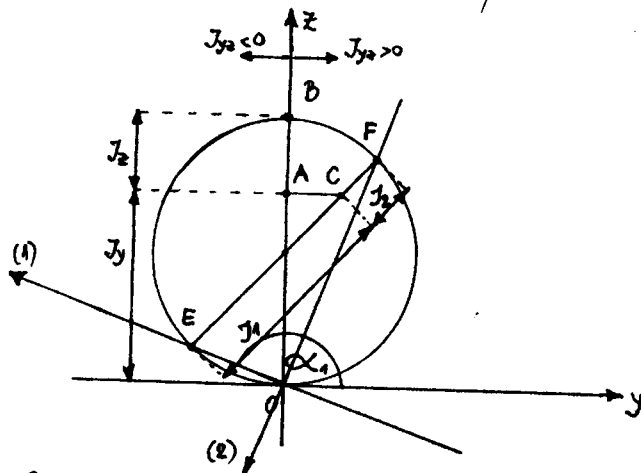
$$i_2^D = \sqrt{\frac{0,03841 R^4}{R^2}} = \dots R$$



$$J_y + J_z = J_\eta + J_\zeta = J_1 + J_2 = I_1 \quad (1. \text{ инваријантна})$$

$$J_1 \cdot J_2 = J_y \cdot J_z - J_{yz}^2 = I_2 \quad (2. \text{ инваријантна})$$

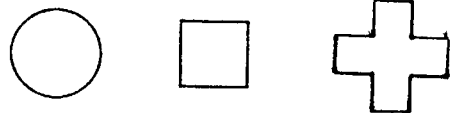
# Морови кругови



$\overline{OA} = J_y$   
 $\overline{AB} = J_z$   
 $\overline{AC} = J_{yz}$   
 $OB \rightarrow \text{круг}$   
 $C \in \text{пречник}$   
 $\overline{CE} \rightarrow J_1$   
 $\overline{CF} \rightarrow J_2$   
 $\angle yOE = \alpha_1$

у овом случају

Специјални случајеви  $J_y = J_z$ ,  $J_{yz} = 0$   
 Свака оса која пролази кроз тежишће је  
 уједно и главна оса.



Зад. 2. За пресек приказан на слици одредити величине и правце  
 главних центаралних момената инерције и нацртати слесну инерцију.

Решење: Прво предема наћи тежишће улоге фигуре.  
 Поделићемо је на делове  $A_1$  и  $A_2$ .

$$A_1 = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12 \quad A_2 = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08 \quad A = 0,2$$

$$y_T = \frac{-0,1 \cdot A_1 + 0,4 \cdot A_2}{A} = \frac{-0,1 \cdot 0,12 + 0,4 \cdot 0,08}{0,2} = 0,1$$

Другу координату тежишта знамо  
 јер је фигура симетрична  $\Rightarrow z$  је тежишна оса

$$J_y = \left( \frac{1}{12} \cdot 0,6 \cdot 0,2^3 + 0,2^2 \cdot 0,12 \right) + \left( \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,8^3 + 0,3^2 \cdot 0,08 \right)$$

$$= 0,01666 \text{ m}^4 \quad J_y^{A_1} \quad J_y^{A_2}$$

$$J_z = \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,6^3 + \frac{1}{12} \cdot 0,8 \cdot 0,1^3 = 0,00367 \text{ m}^4$$

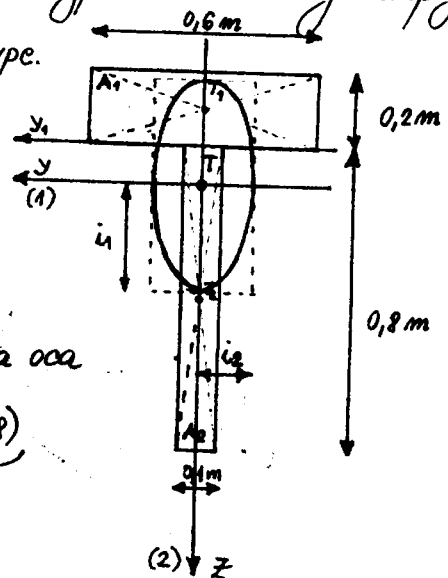
$J_{yz} = 0$  зато што је  $z$  оса симетрије

$$J_1 = J_y = 0,01666$$

$$J_2 = J_z = 0,00367$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}} = \sqrt{\frac{0,01666}{0,2}} = 0,289$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{0,00367}{0,2}} = 0,135$$



Зад. 3. За пресек приказан на слици одредити величине и правце  
 главних центаралних момената инерције и нацртати криву инерције.

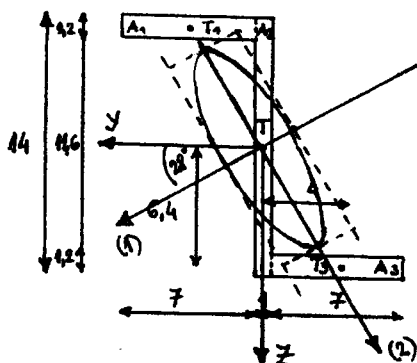
Решење: Имало је једно центарално симетрично тело  
 $\Rightarrow$  одмах знамо тежишће

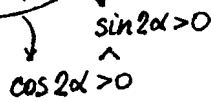
$$A: \square = 14 \cdot 8 - 7 \cdot 11,6 = 30,8 \text{ cm}^2$$

$$J_y \square = J_y \square = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 14^3 - \frac{1}{12} \cdot 7 \cdot 11,6^3 = 918,81$$

$$J_z \square = J_z \square = \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 15^3 + \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 1^3 = 338,56$$

$$J_{yz} = 4 \cdot (-6,4) \cdot (1,2 \cdot 7) + 0 + (-4) \cdot 6,4 \cdot (1,2 \cdot 7) = -430,08$$



$$\tan 2\alpha = \frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot (-430,02)}{918,18 - 338,56} = 1,4824$$


$$L_1 = \sqrt{\frac{1147,47}{30,8}} = 6,1 \text{ cm}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{109,89}{30,8}} = 1,89 \text{ cm}$$

08.10.2007.

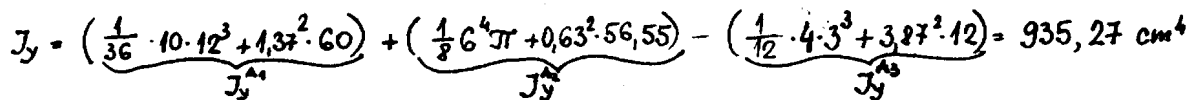
Решение:  $A_1 = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$

$$A_3 = -4 \cdot 3 = -12$$

$$A = \sum A = 104,55 \text{ cm}^2$$

$$y_T = \frac{-3,33 \cdot 60 + 2,55 \cdot 56,55 + (-2) \cdot (-12)}{104,55} = -0,3$$

$$z_T = \frac{4,60 + 6,56,55 + 1,5 \cdot (-12)}{104,55} = 5,37$$

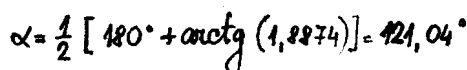


$$J_z = \underbrace{\left( \frac{1}{36} \cdot 12 \cdot 10^3 + 3,03^2 \cdot 60 \right)}_{J_z^{A_1}} + \underbrace{(2 \cdot 0,05488 \cdot 6^4 + 2,85^2 \cdot 56,55)}_{J_z^{A_2}} - \underbrace{\left( \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 4^3 + 1,7^2 \cdot 12 \right)}_{J_z^{A_3}} = 1435,08 \text{ cm}^4$$

$$J_{yz} = \underbrace{\left( +\frac{1}{72} \cdot 10^2 \cdot 12^2 + (-3,03) \cdot (-137) \cdot 60 \right)}_{J_{yz}^A} + \underbrace{\left( 0 + 2,85 \cdot 0,63 \cdot 56,55 \right)}_{J_{yz}^B} - \left( 0 + (-1,7) \cdot (-3,87) \cdot 12 \right) = 471 \text{ cm}^4$$

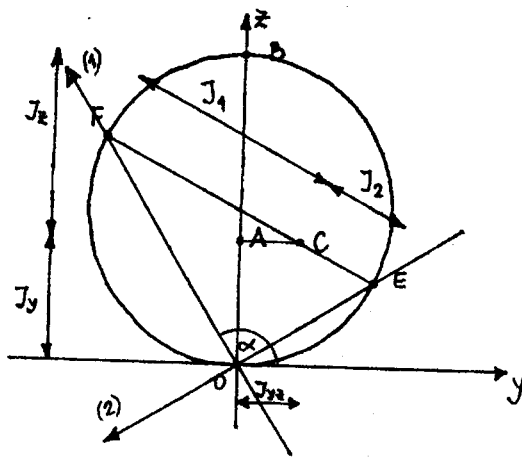
$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_x^2} = \frac{935,27 + 1435,08}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{935,27 - 1435,08}{2}\right)^2 + 471^2} \begin{cases} J_1 = 1718,94 \\ J_2 = 651,4 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2J_{yz}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 471}{935,27 - 1435,08} = 1,8874 \quad \sin 2\alpha < 0, \quad \cos 2\alpha < 0$$

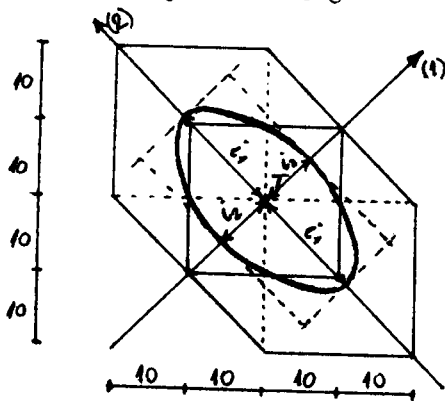


$$i = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{1742,94}{104,55}} = 4,05 \text{ cm}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{651,4}{104,55}} = 2,5 \text{ cm}$$

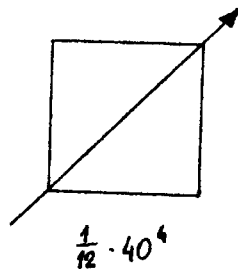


Зад. 2. За површину приказану на слици одредити вредности главних централних момената инерције, правце главних оси и науритани елипсу инерције.

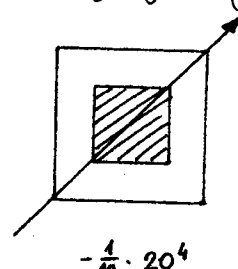


Решение: Пошто је ово централно симетрична фигура можемо одмах одредити тежиште.

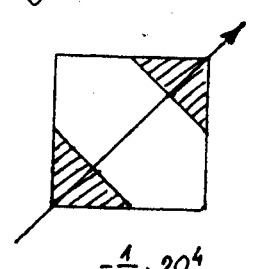
Пошто је  $J_y = J_z$  добијемо да је  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$



$$\frac{1}{12} \cdot 40^4$$



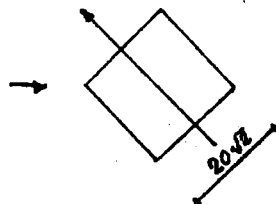
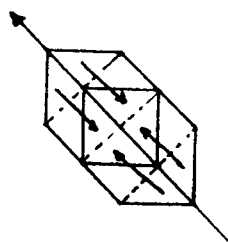
$$-\frac{1}{12} \cdot 20^4$$



$$-\frac{1}{12} \cdot 20^4$$

$$J_1 = \frac{1}{12} (40^4 - 2 \cdot 20^4) = 186667$$

$$J_2 = \frac{1}{12} \cdot (20\sqrt{2})^4 = 53333$$

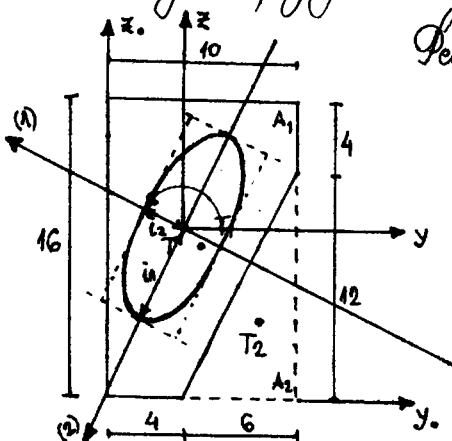


$$A = 40^2 - 2 \cdot 20^2 = 800$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{186667}{800}} = 15,27$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{53333}{800}} = 8,16$$

ад. 3. За површину приказану на слици одредити вредности главних централних момената инерције, правце главних оси и науритани елипсу инерције.



Решение:  $A_1 = 16 \cdot 10$   $A_2 = 12 \cdot \frac{6}{2} = 36$   $A = 124$

$$y_T = \frac{5 \cdot 160 + 8 \cdot (-36)}{124} = 4,13$$

$$z_T = \frac{8 \cdot 160 + 4 \cdot (-36)}{124} = 9,16$$

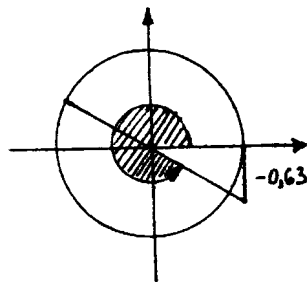
$$J_y = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 16^3 + 1,16^2 \cdot 160 - \left( \frac{1}{36} \cdot 6 \cdot 12^3 + 5,16^2 \cdot 36 \right) = 2382$$

$$J_z = \frac{1}{12} \cdot 16 \cdot 10^3 + 0,87^2 \cdot 160 - \left( \frac{1}{36} \cdot 12 \cdot 6^3 + 3,87^2 \cdot 36 \right) = 843,26$$

$$J_{yz} = 0 + (0,87)(-1,16) \cdot 160 - \left( + \frac{1}{12} \cdot 6^2 \cdot 12^2 + (+3,87)(-5,16) \cdot 36 \right) = 485,42$$

$$J_{1,2} = \frac{2382 + 843,46}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2382 - 843,46}{2}\right)^2 + 485,42^2} \begin{cases} J_1 = 2522,44 \\ J_2 = 702,44 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 \cdot 485,42}{2382 - 843,46} = -0,63 \quad \sin 2\alpha < 0, \cos 2\alpha > 0$$



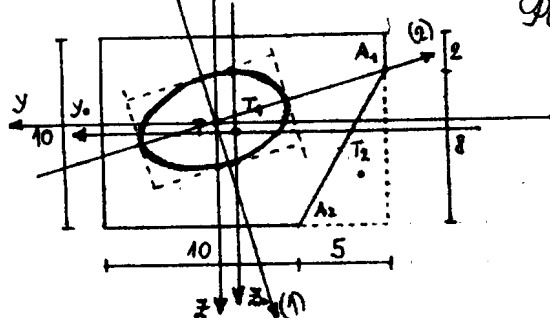
$$2\alpha = 2\pi + \arctg(-0,63) = 2\pi - \arctg(0,63)$$

$$\alpha = \pi - \frac{1}{2} \arctg(0,63) = 163,88^\circ$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}} = 4,51$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = 2,38$$

Зад. 4. За површина приказану на слици одредити вредности главних централних момената инерције, правце главних оса и нацртати елипсу инерције.



$$\text{Решение: } y_T = \frac{(-5,83) \cdot (-20)}{130} = 0,896$$

$$z_T = \frac{2,33 \cdot (-20)}{130} = -0,358$$

$$A_1 = 15 \cdot 10 = 150 \quad A_2 = 8 \cdot \frac{5}{2} = 20 \quad A = 130$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 10^3 - \left(\frac{1}{36} \cdot 5 \cdot 8^3 + 2,33^2 \cdot 20\right) = 1070 \Rightarrow J_{y_1} = J_{y_0} + (0,358)^2 \cdot 130 \Rightarrow J_{y_1} = 1070 - 0,358^2 \cdot 130 = 1053$$

$$J_{z_0} = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 15^3 - \left(\frac{1}{36} \cdot 8 \cdot 5^3 + 5,83^2 \cdot 20\right) = 2104,9 \Rightarrow J_{z_2} = J_{z_0} - 0,896^2 \cdot 130 = 2000,5$$

$$J_{y_0 z_0} = 0 - \left(\frac{1}{72} \cdot 5^2 \cdot 8^2 + (-5,83) \cdot (2,33) \cdot 20\right) = 249,455$$

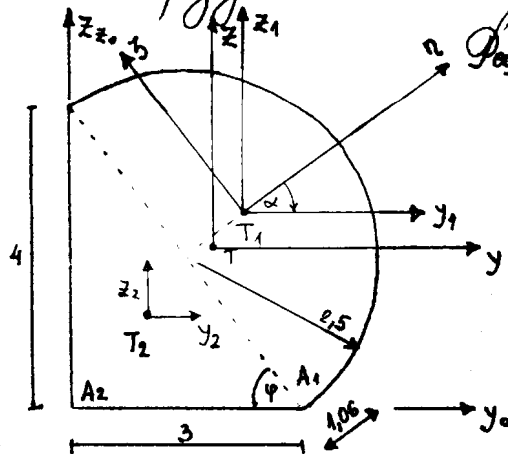
$$J_{y_1 z_1} = J_{y_0 z_0} + (0,896) \cdot (-0,358) \cdot 130 \Rightarrow J_{y_1 z_1} = 249,455 - (0,896) \cdot (-0,358) \cdot 130 = 291,15$$

$$J_{1,2} = \frac{J_{y_1} + J_{z_1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{y_1} - J_{z_1}}{2}\right)^2 + J_{y_1 z_1}^2} = \begin{cases} 2082,5 \rightarrow i_1 = 4 \\ 970,46 \rightarrow i_2 = 2,72 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 \cdot 291,15}{1053 - 2000,5} = 0,615$$

$$2\alpha = \pi + \arctg 0,615 \Rightarrow \alpha = 105^\circ$$

Зад. 5. За површина приказану на слици одредити вредности главних централних момената, правце главних оса и нацртати елипсу инерције.



$$\text{Решение: } A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2,5^2 \pi = 9,81 \text{ cm}^2 \quad A_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$A = 15,81 \text{ cm}^2 \quad \cos \varphi = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \sin \varphi = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$y_{T_1} = 1,5 + 1,06 \cdot 0,8 = 2,35$$

$$z_{T_1} = 2 + 1,06 \cdot 0,6 = 2,64$$

$$y_T = \frac{2,35 \cdot 9,81 + 1,6}{15,81} = 1,81$$

$$z_T = \frac{2,64 \cdot 9,81 + 1,33 \cdot 6}{15,81} = 2,14$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= -0,6 \\ \cos \alpha &= +0,8 \end{aligned} \right\} \alpha = -37^\circ$$

$$J_2^{A_1} = \frac{1}{8} \cdot 2,5^4 \cdot \pi = 15,33$$

$$J_3^{A_1} = 2 \cdot 0,05488 \cdot 2,5^4 = 4,29$$

$$J_{y_1} = \frac{J_2 + J_3}{2} + \frac{J_2 - J_3}{2} \cos 2\varphi - J_{23} \sin 2\varphi = 11,36$$

$$J_{z_1} = -11 - \ominus \quad \text{---} \quad 11 \quad \text{---} \quad \oplus \quad \text{---} \quad 11 \quad \text{---} = 8,26$$

$$J_{y,z_1} = \frac{J_2 - J_3}{2} \sin 2\varphi + J_{23} \cos 2\varphi = -5,3$$

...

$$J_y = 22,98$$

$$J_z = 23,31$$

$$J_{yz} = -0,767$$

$$\left. \begin{aligned} J_y &= 22,98 \\ J_z &= 23,31 \\ J_{yz} &= -0,767 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} J_1 &= 23,93 \\ J_2 &= 22,36 \end{aligned}$$

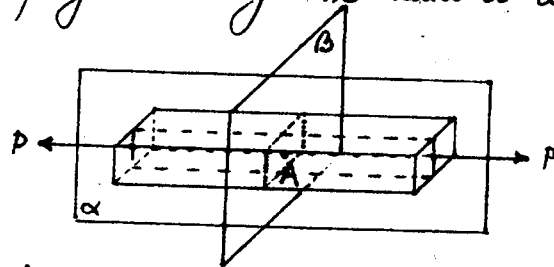
$$\alpha = 51^\circ$$

вектор др. 4.

15.10.2007.

## Анализа напона

Покушаћемо да формулишемо законе како се сила преноси кроз тело.



Ако пресецамо са  $\alpha$  не делују силе измађу тела.  
Ако пресецамо са  $\beta$  делују силе измађу тела.  
 $\Rightarrow$  битна је и равна (кроз тачку) кроз пресецамо тело.

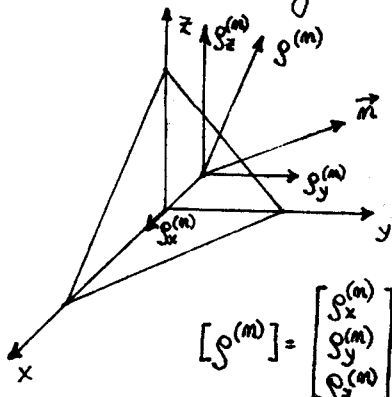
Уводимо вектор тензије напона  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  ( $\vec{n}$  је вектор равни кроз коју пресецамо тело).

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta A} \Leftrightarrow \left[ \frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$$

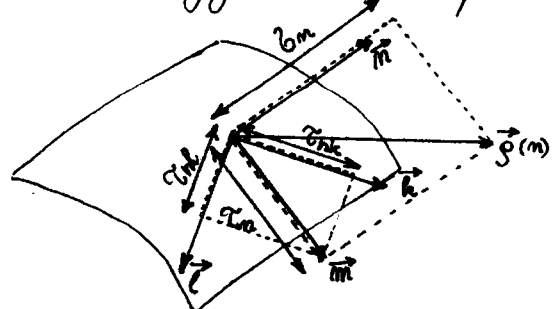
Пошто је  $\vec{F}$  вектор, а самим тим и  $\vec{\sigma}^{(n)}$  можемо га разложити на три компоненте у Декартовом координатном систему.

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \sigma_x^{(n)} \cdot \vec{i} + \sigma_y^{(n)} \cdot \vec{j} + \sigma_z^{(n)} \cdot \vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - јединични вектори

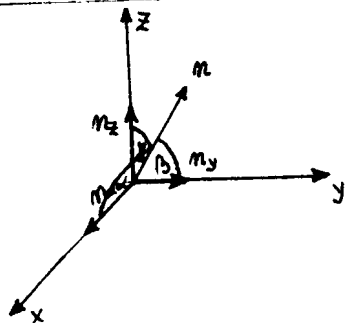


$$[\sigma^{(n)}] = \begin{bmatrix} \sigma_x^{(n)} \\ \sigma_y^{(n)} \\ \sigma_z^{(n)} \end{bmatrix}$$



$\sigma_n$  - нормални напон (лежи на нормали)  
 $\sigma_t$  - тангентални напон (лежи у равни површи)  
 $\sigma_{tn}$  -  $n$  - правац нормале на пресеци равни  
 $\sigma_{nt}$  -  $t$  - смер деловања тангенталног напона

$$\sigma_m^2 + \tau_m^2 = |\vec{g}^{(m)}|^2 \Rightarrow \tau_m = \sqrt{|\vec{g}^{(m)}|^2 - \sigma_m^2}$$



$\vec{m}$  možemo razložiti na tri komponente

$$\vec{m} = m_x \vec{i} + m_y \vec{j} + m_z \vec{k}$$

$$= \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$$

$$m = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Postoji dva oblika za određivanje normalnog napona

$$I \quad \sigma_m = \vec{g}^{(m)} \cdot \vec{m} = g_x^{(m)} \cdot m_x + g_y^{(m)} \cdot m_y + g_z^{(m)} \cdot m_z$$

$$II \quad (\text{matricni oblik}) \quad \sigma_m = [\vec{g}^{(m)}]^T \cdot [m]$$

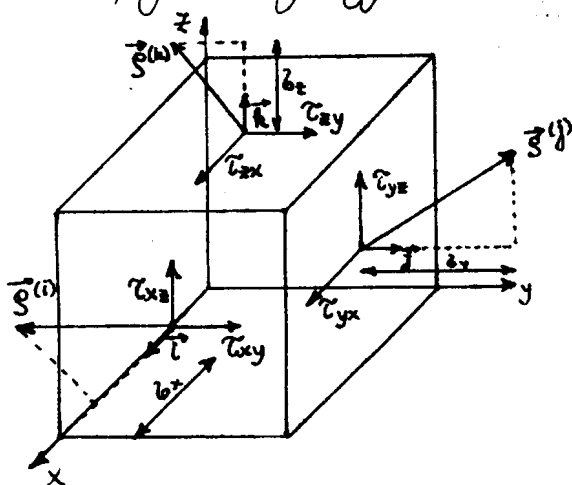
Vratimo se na poslednju sliku sa prethodne stranice. Uveli smo  $\vec{m}$  (pravac vektora normalnog smjera napona).

$$\vec{g}^{(m)} \cdot \vec{m} = \sigma_m$$

$$\tau_m \cdot \vec{m} = \vec{g}^{(m)} - \sigma_m \vec{m} \Rightarrow \vec{m} = \frac{\vec{g}^{(m)} - \sigma_m \vec{m}}{|\vec{g}^{(m)} - \sigma_m \vec{m}|}$$

Poznat nam je stanje napona u bilo kojoj ravni kroz neku tačku ako znamo  $\vec{g}^{(m)}$ . Da bi mi to znali moramo da znamo stanje napona u tri međusobno upravne ravni.

Pogledajmo kockicu beskonačno male dimenzije.



$$\vec{g}^{(i)} = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$$

$$\vec{g}^{(j)} = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}$$

$$\vec{g}^{(k)} = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k}$$

Тензор напона (матрица која садржи компоненте ова три вектора)

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} [Pa] \text{ О.С.А.Н.} \Rightarrow \begin{matrix} \tau_{yx} = \tau_{xy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{matrix}$$

(компоненте три међусобно управне равни)

да бисмо одредили стање напона посредно су нам све ове компоненте

Другачије записујемо  $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$   
(иста вредност → нормални, различити → сликунги)

Основни став анализе напона:  $\vec{g}^{(m)} \cdot \vec{m} = \vec{g}^{(m)} \cdot \vec{m}$

О.С.А.Н. важи за произвољне правце  $\vec{m}$  и  $\vec{m}$ .

Применом на кockицу  $\vec{g}^{(i)} \cdot \vec{j} = \vec{g}^{(j)} \cdot \vec{i} \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (\tau_{ij} = \tau_{ji})$

О.С.А.Н.  $\Rightarrow$  став о конјугованости сликунги напона  $\Rightarrow S$  је симетрична.

Косинусе ј-не:

$$\begin{aligned} g_x^{(m)} &= \cos \alpha \cdot m_x + \tau_{xy} \cdot m_y + \tau_{xz} \cdot m_z \\ g_y^{(m)} &= \tau_{yx} \cdot m_x + \cos \beta \cdot m_y + \tau_{yz} \cdot m_z \\ g_z^{(m)} &= \tau_{zx} \cdot m_x + \tau_{zy} \cdot m_y + \cos \gamma \cdot m_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_x^{(m)} &= \cos \alpha \cdot m_x + \tau_{xy} \cdot m_y + \tau_{xz} \cdot m_z \\ g_y^{(m)} &= \tau_{yx} \cdot m_x + \cos \beta \cdot m_y + \tau_{yz} \cdot m_z \\ g_z^{(m)} &= \tau_{zx} \cdot m_x + \tau_{zy} \cdot m_y + \cos \gamma \cdot m_z \end{aligned}$$

$$[g^{(m)}] = \begin{bmatrix} g_x^{(m)} \\ g_y^{(m)} \\ g_z^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \cos \beta & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow [g^{(m)}] = [S] \cdot [m]$$

(m-вектор било које равни)

Сада ћемо се пребацити на координатни систем nkl.

$$\cos m = g_x^{(m)} \cdot m_x + g_y^{(m)} \cdot m_y + g_z^{(m)} \cdot m_z = [g^{(m)}]^T \cdot [m] = ([S] \cdot [m])^T \cdot [m] = [m]^T \cdot [S] \cdot [m]$$

$$\cos l = [g^{(m)}]^T \cdot [l] = ([S] \cdot [m])^T \cdot [l] = [m]^T \cdot [S] \cdot [l]$$

$$\cos k = [g^{(m)}]^T \cdot [k] = \dots = [m]^T \cdot [S] \cdot [k]$$

$$\begin{aligned} (\cos m \quad \cos l \quad \cos k) &= [m]^T \cdot [S] \cdot \begin{bmatrix} m \\ l \\ k \end{bmatrix} \\ (\cos m \quad \cos l \quad \cos k) &= [m]^T \cdot [S] \cdot \begin{bmatrix} m \\ l \\ k \end{bmatrix} \\ (\cos m \quad \cos l \quad \cos k) &= [m]^T \cdot [S] \cdot \begin{bmatrix} m \\ l \\ k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$S'_{mlk} = \begin{bmatrix} \cos m & \cos l & \cos k \\ \cos m & \cos l & \cos k \\ \cos m & \cos l & \cos k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ l \\ k \end{bmatrix}}_A \cdot [S] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ l \\ k \end{bmatrix}}_{A^T} \Rightarrow S' = A \cdot S \cdot A^T$$

$$\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline \vec{m} & m_x & m_y & m_z \\ \vec{l} & l_x & l_y & l_z \\ \vec{k} & k_x & k_y & k_z \end{array} = A$$

Зад. 1. ~~Степе~~ напона у некој тачки најрејнијом тачки задато је тензором напона S. ~~Одредити~~ ~~тлоштални~~ ~~напон~~ ~~g^{(m)}~~ у равни са нормалом  $\vec{m} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$  и за истако одређен тлоштални напон ~~g^{(m)}~~ одредити нормални напон  $\cos m$  и слику напон  $\cos n$ .

$$S = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Решене: Прво проверавамо да ли је  $\vec{m}$  јединични вектор  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$   
 $\vec{m} = \left(\frac{2}{3}\right)\vec{i} - \left(\frac{2}{3}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{k} \Rightarrow \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \vec{m}$  је јединични вектор

Нама преба јединични вектор, а  $\vec{m}$  то јесте.

$$\begin{aligned} g_x^{(m)} &= \cos \alpha \cdot m_x + \tau_{xy} \cdot m_y + \tau_{xz} \cdot m_z = 7 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (-2) \cdot \frac{1}{3} = 4 \\ g_y^{(m)} &= \tau_{yx} \cdot m_x + \cos \beta \cdot m_y + \tau_{yz} \cdot m_z = 0 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3} \\ g_z^{(m)} &= \tau_{zx} \cdot m_x + \tau_{zy} \cdot m_y + \cos \gamma \cdot m_z = -2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$g^{(m)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [Pa]} = \left(4\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j}\right) \text{ [Pa]}$$

$$\cos m = \vec{g}^{(m)} \cdot \vec{m} = g_x^{(m)} \cdot m_x + g_y^{(m)} \cdot m_y + g_z^{(m)} \cdot m_z = 4 \cdot \frac{2}{3} - \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} + \frac{20}{9} = \frac{44}{9}$$

$$\cos m = \frac{44}{9} \cdot \text{Pa} = 4,889 \text{ Pa}$$

$$|\vec{s}^{(m)}| = \sqrt{4^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = 5,207 \text{ Pa}$$

$$\cos \alpha_{1s^{(m)}} = \frac{s_x^{(m)}}{|\vec{s}^{(m)}|} = 0,768822 = \frac{4}{5,207}$$

$$\cos \beta_{1s^{(m)}} = \frac{s_y^{(m)}}{|\vec{s}^{(m)}|} = -0,64013 = \frac{-\frac{10}{3}}{5,207}$$

$$\cos \gamma_{1s^{(m)}} = \frac{s_z^{(m)}}{|\vec{s}^{(m)}|} = \frac{0}{5,207} = 0$$

$$\tau = \sqrt{|\vec{s}^{(m)}|^2 - \sigma_m^2} = \sqrt{5,207^2 - 4,889^2} = 1,792 \text{ Pa}$$

Госитоји и другим начин (знајно краји)

$$[s^{(m)}] = [S] \cdot [m] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x^{(m)} \\ s_y^{(m)} \\ s_z^{(m)} \end{bmatrix}$$

Зад. 2. Силање напона у некој тачки непрегнупног тела је задато тензором напона  $S$ . Написајте поглавни напон за раван која је паралелна са равни  $x+2y+2z-6=0$ .

$$S = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -400 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Решење: Прво преба да нађемо јединични вектор равни!

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$m_x : m_y : m_z = A : B : C$$

$$\vec{m} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} \quad (\text{није јединични})$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} \Rightarrow \begin{aligned} n_x &= \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{3} \\ n_y &= \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3} \\ n_z &= \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad n = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$[s^{(m)}] = [S] \cdot [n] = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -400 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1600}{3} \\ \frac{400}{3} \\ \frac{100}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 533,3 \\ 133,3 \\ 33,3 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

$$|\sigma^{(m)}| = \sqrt{(533,3)^2 + 133,3^2 + 33,3^2} = 550,35 \text{ MPa}$$

Зад. 3. Силање напона у некој тачки непрегнупног тела је задато тензором напона  $S$  у координатном систему  $x,y,z$ . Написајте тензор поглед напона у трансформисаном координатном систему  $x',y',z'$  ако су правци нових координатних оса дајем у векторском облику  $\vec{x}' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{y}' = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{z}' = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

$$S = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Решење: Први услов је да  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  буду јединични вектори.

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k}$$

$$\vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \vec{j}$$

$$\vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+16}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+16}} \vec{j} - \frac{4}{\sqrt{1^2+1^2+16}} \vec{k}$$

Други услов је да су  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  међусобно нормални.

$$\begin{aligned} \vec{i}' \cdot \vec{j}' &= 0 \\ \vec{j}' \cdot \vec{k}' &= 0 \\ \vec{i}' \cdot \vec{k}' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cc} & i & j & k \\ \hline i' & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ j' & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ k' & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$S' = A \cdot S \cdot A^T$$

$$= 100 \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$S'_{x'y'z'} = \begin{bmatrix} 133 & 118 & -165 \\ 118 & 0 & -33 \\ -165 & -33 & -133 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

(треба да добијемо симетричну матрицу)

Слично као и код момената инерције, посматраћемо координатни систем са максималним главним моментима - главне осе.

правци главних оса  $S_{x_1, x_2, x_3} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} b_x - b & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & b_y - b & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & b_z - b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow b^3 - I_1 b^2 + I_2 b - I_3 = 0 \quad \text{- секуларна једначина}$$

Секуларна једначина увек има три реална решења.

$I_1, I_2, I_3$  су вредности које би се добиле када би се детерминанта развила.

Решења поредју биће иста независно од избора координатног система. Због тога су  $I_1, I_2, I_3$  инваријанте - инваријанте

$$I_1 = b_x + b_y + b_z$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} b_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & b_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & b_z \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} b_x - b_k & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & b_y - b_k & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & b_z - b_k \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} &\Rightarrow I_1, I_2, I_3 \\ &\Rightarrow b_1, b_2, b_3 \\ &\Rightarrow b_k, k=1,2,3 \end{aligned} \right\}$$

Сада одређујемо правце главних оса:

$$\begin{bmatrix} b_x - b_k & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & b_y - b_k & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & b_z - b_k \end{bmatrix}$$

$$m_x^{(k)} = \frac{C_x^{(k)}}{\sqrt{(C_x^{(k)})^2 + (C_y^{(k)})^2 + (C_z^{(k)})^2}}$$

$$m_y^{(k)} = \frac{C_y^{(k)}}{\sqrt{(C_x^{(k)})^2 + (C_y^{(k)})^2 + (C_z^{(k)})^2}}$$

$$m_z^{(k)} = \frac{C_z^{(k)}}{\sqrt{(C_x^{(k)})^2 + (C_y^{(k)})^2 + (C_z^{(k)})^2}}$$

$$C_x^{(k)} = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ b_y - b_k & \tau_{yz} \end{vmatrix}$$

$$C_y^{(k)} = \begin{vmatrix} b_x - b_k & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yz} \end{vmatrix}$$

$$C_z^{(k)} = \begin{vmatrix} b_x - b_k & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & b_y - b_k \end{vmatrix}$$

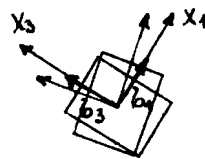
1°  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \neq 0$  - просторно ситње напона

2°  $\sigma_k = 0 \quad \sigma_L, \sigma_M \neq 0$  - равно ситње напона

3°  $\sigma_k, \sigma_L = 0 \quad \sigma_M \neq 0$  - линеарно ситње напона

4°  $\sigma_k = \sigma_L = \sigma_M$  - сферно ситње напона

Максимални ситгући напон  $\tau_{mx} : \tau_{x_1, x_3} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$



Зад. 1. Ако су познати правци главних напона

$$\vec{m}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{m}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{m}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 - \vec{j} - \vec{k})$$

као и вектор пошталног напона  $\vec{\sigma}^{(m)} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  [Pa] да раван са нормалом  $\vec{m} = \frac{1}{5\sqrt{2}} (5\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k})$ , одредити вредности главних напона  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Решење: Применићемо основни ситав анализе напона  $\vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{m} = \vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{m}$  у ситаву главне осе постоје само нормални напони.

$$\vec{\sigma}^{(m)} = \sigma_1 \vec{m}_1$$

$$\vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{m}_1 = \vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{m} = \sigma_1 \vec{m}_1 \cdot \vec{m} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{m}_1}{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}}$$

$$\sigma_1 = \frac{\frac{1}{3} (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2))}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3))} = \frac{20\sqrt{2}}{9} = 3,14$$

$$\sigma_2 = \frac{\vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{m}_2}{\vec{m}_2 \cdot \vec{m}} = \dots = 2,88$$

$$\sigma_3 = \frac{\vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{m}_3}{\vec{m}_3 \cdot \vec{m}} = \dots = -7,07$$

Вежба бр. 5

22.10.2007.

Анализа ситња напона - наставак

Зад. 1. Ситње напона у некој тачки најрећућног тела задајто је тензором напона  $S$ . Одредити величине и правце главних напона, као и величину максималног ситгућег напона.

$$S = \begin{bmatrix} 55,6 & 943 & -157 \\ 943 & 0 & 333 \\ -157 & 333 & 444 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Решење: Величине главних напона налазимо као решења секуларне ј-не  $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$

$$I_1 = 55,6 + 0 + 444 = 499,6 \approx 500 \quad (\text{збир главне дијагонала})$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 55,6 & 943 \\ 943 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 55,6 & -157 \\ -157 & 444 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 333 \\ 333 & 444 \end{vmatrix} \approx -1 \cdot 10^6$$

$$I_3 = \det S = \begin{vmatrix} 55,6 & 943 & -157 \\ 943 & 0 & 333 \\ -157 & 333 & 444 \end{vmatrix} \approx -5 \cdot 10^8$$

$$\sigma^3 - 500\sigma^2 + (-1 \cdot 10^6)\sigma - (-5 \cdot 10^8) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 1000$$

$$\sigma_2 = 500$$

$$\sigma_3 = -1000$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} [1000 - (-1000)] = 1000$$

$$\vec{m}^{(1)} = \begin{bmatrix} (55,6 - 1000) & 943 & -157 \\ 943 & (0 - 1000) & 333 \\ -157 & 333 & (444 - 1000) \end{bmatrix}$$

$$C_x^{(1)} = \begin{vmatrix} \text{X} & & \\ & \text{X} & \\ & & \text{X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 943 & -157 \\ -1000 & 333 \end{vmatrix} = 157\,019$$

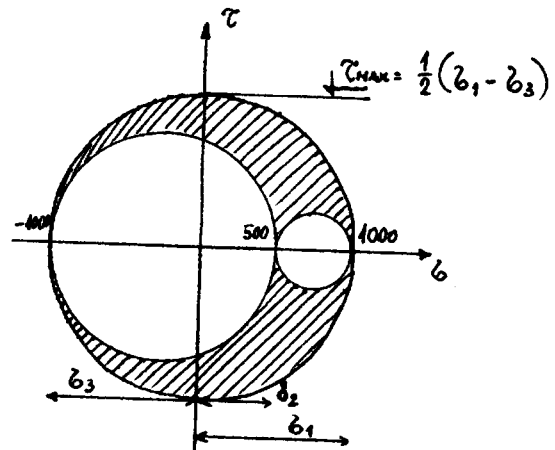
$$C_y^{(1)} = \begin{vmatrix} \text{X} & & \\ & \text{X} & \\ & & \text{X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -944,4 & -157 \\ 943 & 333 \end{vmatrix} = -166\,434$$

$$C_z^{(1)} = \begin{vmatrix} \text{X} & & \\ & \text{X} & \\ & & \text{X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -944 & 943 \\ 943 & -1000 \end{vmatrix} = 55\,151$$

$$m_x^{(1)} = \frac{C_x^{(1)}}{\sqrt{(C_x^{(1)})^2 + (C_y^{(1)})^2 + (C_z^{(1)})^2}}$$

$$m_y^{(1)} = \dots$$

$$\dots$$



За произвољан правац вредности нормалног и сликљивог напона налазе се у шрафираној области.

Увек ћемо појам сферног напона. Наиме, напон се дели на сферни и девијаторски део.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3}$$

$$S = S_{sf} + S_{dev} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

Материјали су знатно отпорнији на сферни напон (нпр. када кален бацимо у бајел). Сферни напон доводи до промене запремине, а девијаторски доводи до промене облика (љума).

Зад. 2. Разложити тензор напона  $S$  на сферни и девијаторски део и показати да је прва инваријанта девијаторског дела једнака нули.

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\text{Решење: } \bar{\sigma} = \frac{12+9+3}{3} = 8$$

$$S^{(s)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$S^{(dev)} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$I_1^{(dev)} = 4+1-5=0 \quad \text{— увек истинско}$$

Код сферног напона главни напони су у свим правцима.

Зад. 3. Ако је поле напона у неком телу задато тензором напона  $S$  одређити заједничке виле које делују у том телу.

$$S = \begin{bmatrix} xz & 2x & z^2 \\ 2x & 7+x & x \cdot y \\ z^2 & xy & 4y \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$$

Решење:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{q=1}^3 \frac{\partial \sigma_{pq}}{\partial x_q} + F_p = 0$$

$$\begin{aligned} z+0+2z+F_x &= 0 \Rightarrow F_x = -3z \frac{N}{m^3} \\ 2+0+0+F_y &= 0 \Rightarrow F_y = -2 \frac{N}{m^3} \\ 0+x+0+F_z &= 0 \Rightarrow F_z = -x \frac{N}{m^3} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = (-3z\vec{i} - 2\vec{j} - x\vec{k}) \frac{N}{m^3}$$

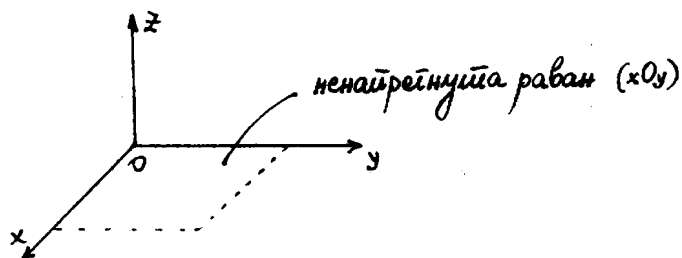
Двоосно (равно) стање напона

Представља ситујалан случај стања напона.

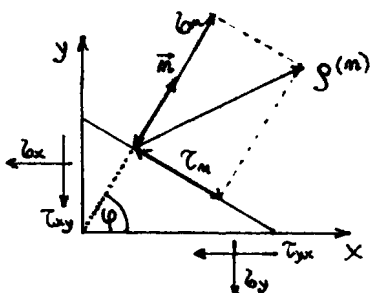
Потребан и довољан услов:  $\det[S] = 0$ ,  $\text{rang}[S] = 2$

$\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}, \vec{r}^{(3)}$  су у једној равни  $\Rightarrow \vec{r}^{(1)}(\vec{r}^{(1)} \times \vec{r}^{(2)}) = 0$

$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$  3. врста је линеарна комбинација претходне две

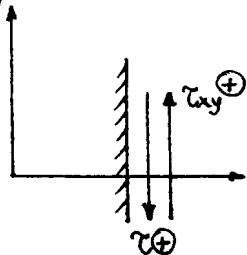


$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

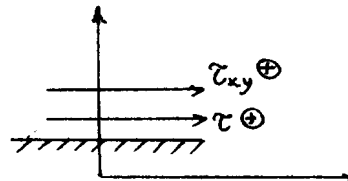


$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

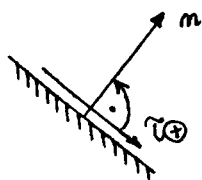
$\varphi = 0$ : нормала  $n$  се поклапа са  $x$ -осом



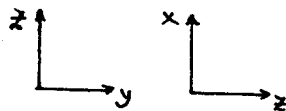
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ :  $n$  се поклапа са  $y$ -осом



$\tau$  напон је зоритиван ако ротацијом за  $90^\circ$  у смеру  $\odot$  се поклапа са  $\vec{n}$ .



$\tau_{xy}$   
 $\tau_{xz}$  } позитивни у правцу оса



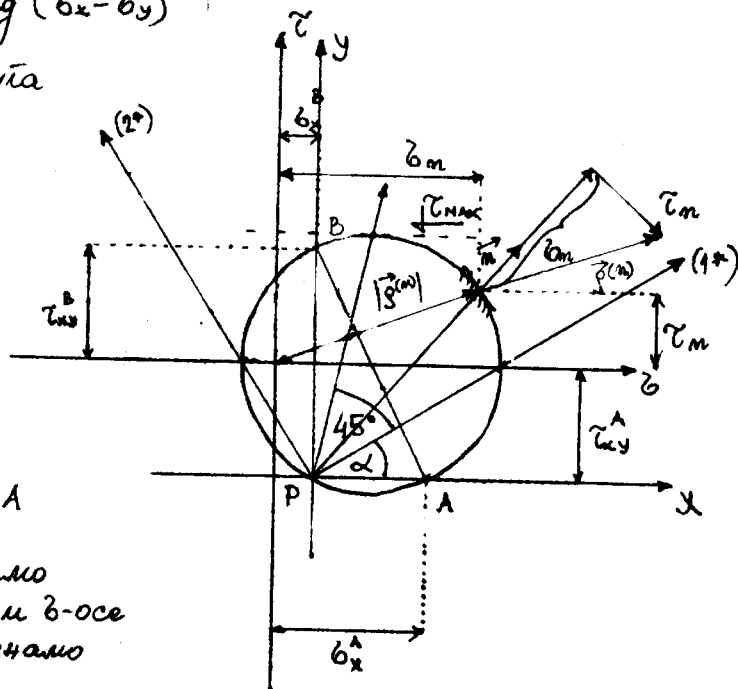
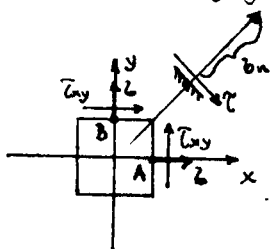
Можемо да посматрамо и следице када су нам  $yOz$  и  $zOx$  ненапреици-  
ше равни, с тим што смо онда верификовали индекс

Главни напони у ненапреицију равни се рачунају по формули:

$$\sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} < \sigma_1^* \quad (\text{увек додато нулу тако да } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \begin{aligned} \text{sign}(\sin 2\alpha) &= \text{sign } 2\tau_{xy} \\ \text{sign}(\cos 2\alpha) &= \text{sign}(\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned}$$

• конструкција Моровог круга

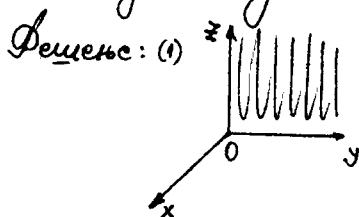


1. наносимо  $\sigma$  и  $\tau$
2. конструишемо круг над  $\overline{AB}$
3. повлачимо у кроз  $B$  и кроз  $A$  и додијемо  $P$  у пресеку
4. главне осе додијемо када спојимо линију  $P$  са пресецима круга и  $\sigma$ -осе
5. за сваку равну појм вектор знамо можемо да опишемо  $\tau$  и  $\sigma$

Зад. 4. Силање напона у некој тачки најпреицијот има задато је тензором напона

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

- (1) Показати да је силање напона равно
- (2) Одредити главне напоне, правце главних оса и максимални сликучки напон аналитичким и графичким путем
- (3) Одредити компоненталне напоне за равну која нормала лежи у равни  $yOz$  и са осом  $y$  гради угла  $120^\circ$
- (4) Одредити и интензитет вектора пошталног напона  $S^{(n)}$ , као и угла који вектор  $S^{(n)}$  гради са осом  $y$ .



сви напони леже у равни  $yOz$

$$\begin{vmatrix} -30 & -20 \\ -20 & 40 \end{vmatrix} = -1200 - 400 = -1600 \neq 0 \Rightarrow \text{ранг је } 2 \Rightarrow \text{равно силање напона}$$

(2) главни напони

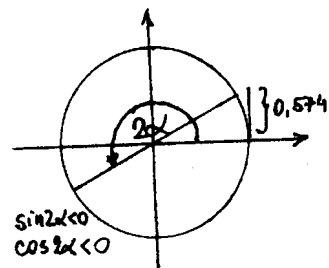
$$\sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{-30 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30 - 40}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 5 \pm \sqrt{35^2 + 20^2} = \begin{cases} 45,31 \\ -35,31 \end{cases}$$

$$\sigma_1^* = 45,31 \quad \sigma_2^* = 0 \quad \sigma_3^* = -35,31$$

правуи главних оса

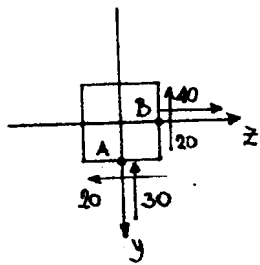
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{+2\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{+2 \cdot (-20)}{-30 - 40} = \frac{-40}{-70} = 0,574$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (\arctg 0,574 + \pi) = 104,87^\circ$$

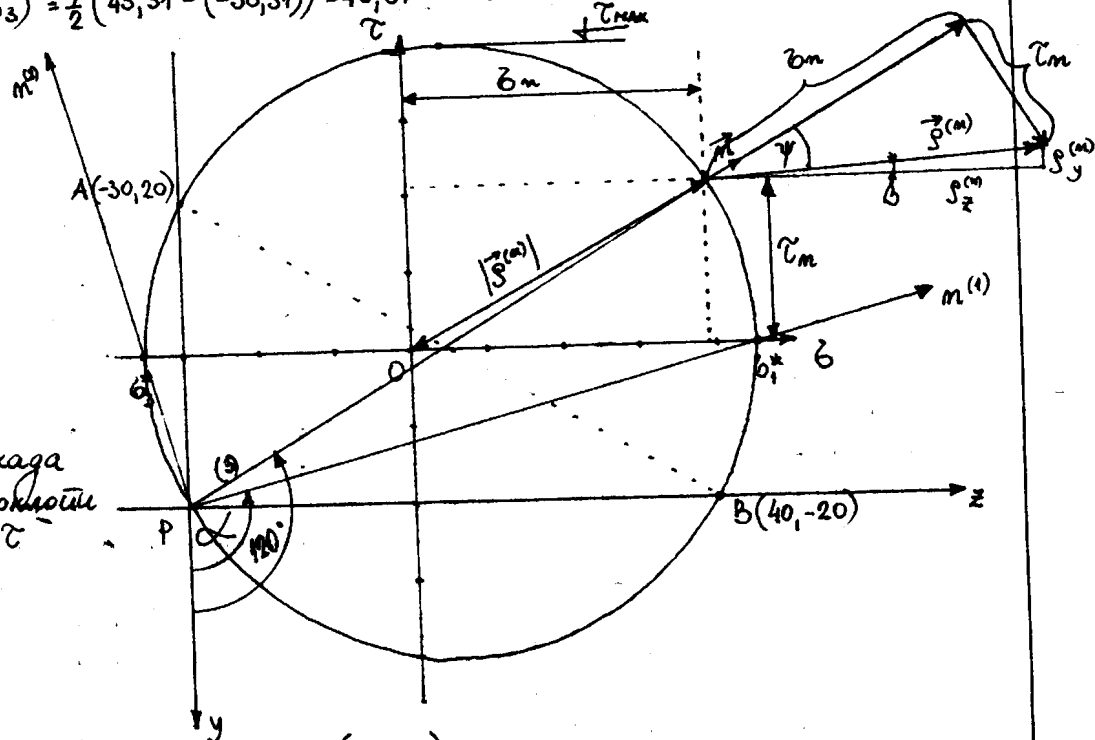


максимални ситиуи напон

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} (45,31 - (-35,31)) = 40,31 \text{ MPa}$$



$\tau$  уришмо позитивну када се при ротацији  $\sigma$  поклопи са смером осе смер  $\tau$



$$(3) \quad \sigma_m = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot 120^\circ) + \tau_{yz} \sin(2 \cdot 120^\circ)$$

$$= \frac{-30 + 40}{2} + \frac{-30 - 40}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + (-20) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 39,82 \text{ kPa}$$

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cdot \sin(2 \cdot 120^\circ) - \tau_{yz} \cdot \cos(2 \cdot 120^\circ)$$

$$= \frac{-30 - 40}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-20) \left(-\frac{1}{2}\right) = 20,31 \text{ kPa}$$

$$(4) \quad |\vec{\sigma}^{(n)}| = \sqrt{\sigma_m^2 + \tau_m^2} = 44,7 \text{ kPa}$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{\tau_m}{\sigma_m}\right) = 27,02 \quad \text{и } \psi, \vec{\sigma}^{(n)} = \varphi - \psi = 120 - 27,02 = 92,98$$

$$\sigma_x^{(n)} = \sigma_x \cdot m_x + \tau_{xy} \cdot m_y + \tau_{xz} \cdot m_z = 0$$

$$\vec{m} : \begin{aligned} m_x &= 0 \\ m_y &= -\frac{1}{2} \\ m_z &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\sigma_y^{(n)} = \tau_{yx} \cdot m_x + \sigma_y \cdot m_y + \tau_{yz} \cdot m_z$$

$$= 0 \cdot 0 + (-30) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-20) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2,32$$

$$\sigma_z^{(n)} = \tau_{zx} \cdot m_x + \tau_{zy} \cdot m_y + \sigma_z \cdot m_z$$

$$= 0 \cdot 0 + (-20) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 44,64$$

$$|\vec{\sigma}^{(n)}| = \sqrt{(\sigma_x^{(n)})^2 + (\sigma_y^{(n)})^2 + (\sigma_z^{(n)})^2} = \sqrt{0 + (-2,32)^2 + 44,64^2} = 44,7 \quad \beta = \arctg\left(\frac{\sigma_y^{(n)}}{\sigma_z^{(n)}}\right) = 2,975$$

Зад. 5. Силање напона у некој тачки је задато тензором напона  $S$ .

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & b_y & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Одредити  $b_y$  тако да силање напона буде равно
- Одредити једначину ненормираног равни
- Одредити главне напоне и њихове правце
- Накратим Морове кружове напона
- Одредити  $\tau_{\max}$
- Написаи тензор напона у систему главних оса.

Решење: а)  $\det[S] = 0$   
 $\det[S] = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot b_y = 0$   
 $2 + 2 - 4b_y = 0$   
 $b_y = 1$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rang } S = 2$$

- б) услов је да три вектора буду колинеарна  
 $\vec{r} \cdot (\vec{p}^{(y)} \times \vec{p}^{(x)}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x + 2y - z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{— једначина ненормираног равни}$$

- в) Да смо имали да ненормираног равни неку координатну равни моћи бисмо да главне напоне одређујемо преко Моровог кружа!

$$b^3 - I_1 b^2 + I_2 b - I_3 = 0$$

$$I_1 = 1$$

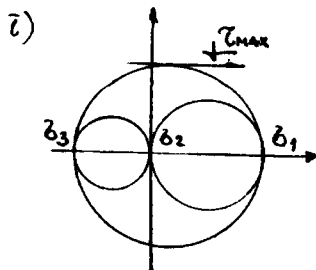
$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (-4) + (-1) = -6$$

$$I_3 = 0$$

$$b^3 - b^2 + (-6)b - 0 = 0$$

$$b(b^2 - b - 6) = 0$$

$$b = 0 \quad b_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} b \\ b_{1,2} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} b_1 = 3 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = -2 \end{matrix}$$



г)  $\tau_{\max} = \frac{b_1 - b_2}{2} = \frac{3 - 0}{2} = 1.5$

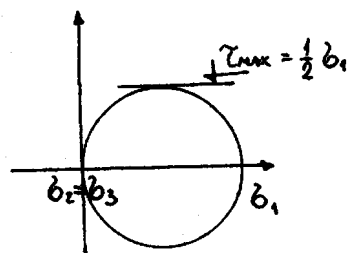
- д) тензор напона у систему главних оса

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

# Линеарно хипонско ситање

Сви вектори су колинеарни:  $\vec{r}^{(w)} \parallel \vec{r}^{(w)} \parallel \vec{r}^{(e)}$

$$\begin{bmatrix} \vec{r}^{(w)} \\ \lambda \vec{r}^{(w)} \\ \mu \vec{r}^{(w)} \end{bmatrix} \quad \text{rang}[S] = 1 \quad \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

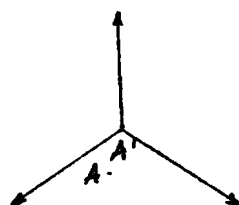
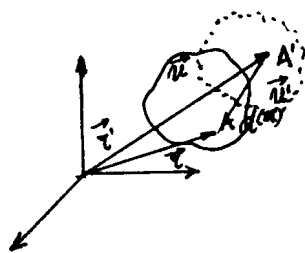


Вежба бр. 6

29. 10. 2007.

## Анализа деформације

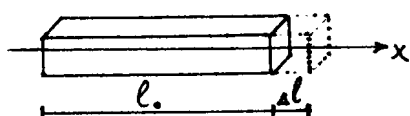
Посматрамо у околини бесконачно мале тачке.



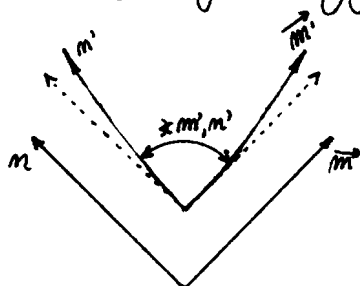
Вектор деформације  $\vec{d}^{(m)}$

$$\vec{d}^{(m)} = d_x^{(m)} \cdot \vec{i} + d_y^{(m)} \cdot \vec{j} + d_z^{(m)} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{d}^{(m)} \cdot \vec{n} = \epsilon_m$$



$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{дилатација})$$



друга појава: промена угла

$$\gamma_{m,n} = \frac{\pi}{2} - \angle \vec{m}', \vec{n}'$$

$$\vec{d}_{mnl}^{(m)} = \epsilon_n \cdot \vec{n} + \frac{1}{2} \gamma_{nm} \cdot \vec{m} + \frac{1}{2} \gamma_{nl} \cdot \vec{l}$$

A. H.	S	$\vec{r}^{(m)}$	b	$\tau$
A. A.	D	$\vec{d}^{(m)}$	$\epsilon$	$\frac{1}{2} \gamma$

Тензор деформације

$$D = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^{(w)} \\ d^{(w)} \\ d^{(w)} \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$d_x^{(m)} = \epsilon_x m_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} m_y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} m_z$$

$$d_y^{(m)} = \frac{1}{2} \gamma_{yx} m_x + \epsilon_y m_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} m_z$$

$$d_z^{(m)} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} m_x + \frac{1}{2} \gamma_{zy} m_y + \epsilon_z m_z$$

$$\Rightarrow \{d^{(m)}\} = [D] \cdot [m]$$

Трансформација координатног система

$$D'_{x'y'z'} = A \cdot D \cdot A^T$$

где A добијато на следећи начин

	x	y	z
x'	x'_1	x'_2	x'_3
y'	y'_1	y'_2	y'_3
z'	z'_1	z'_2	z'_3

Зад. 1. Призматични штап дужине  $l_0 = 2,348 \text{ m}$  заједно је тако да му је дужина после деформације постала  $l_1 = 2,353 \text{ m}$ . Одреди дилатацију у правцу осе штапа.

Решење:



$$\epsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{0,005}{2,348} = 2130 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta l = l_1 - l_0 = 2,353 - 2,348 = 0,005$$

Зад. 2. Призматични штап дужине  $l_0 = 4,0 \text{ m}$  заједно је силама на крајевима и при томе је његова дилатација износила  $\epsilon_x = 0,001$ . Колика је дужина штапа после деформације?

Решење:  $\epsilon_x = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \Rightarrow l_0 \cdot \epsilon_x = l_1 - l_0 \Rightarrow (1 + \epsilon_x) l_0 = l_1, 1,001 \cdot 4 \text{ m} = 4,004 \text{ m}$

Зад. 3. Ситане деформације у некој тачки задато је тензором деформације:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

а) Одреди дилатацију правца  $n$  који са координатним осима гради једнаке углове.

б) Одреди кривање између правца  $n$  и њему управног правца  $l$ ,  $l \in xOy$ .

в) Напиши тензор деформације  $D'$  у новом трансформисаном координатном систему  $n, l, m$  при чему  $m$  са осом  $x$  гради оштар угао  $\pi/4 < \pi/2$ .

Решење: а)  $xOy = x'Oz = x'Oz$   
 $n_x = n_y = n_z$

$$|\vec{n}| = 1 = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{3n_x^2}$$

$$n_x = n_y = n_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$[d^{(n)}] = [D] \cdot [n] = \begin{bmatrix} d_x^{(n)} \\ d_y^{(n)} \\ d_z^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_n = \vec{d}^{(n)} \cdot \vec{n} = [d^{(n)}]^T \cdot [n]$$

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \epsilon_x n_x^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy} n_x n_y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} n_x n_z \\ &+ \frac{1}{2} \gamma_{yx} n_x n_y + \epsilon_y n_y^2 + \frac{1}{2} \gamma_{yz} n_y n_z \\ &+ \frac{1}{2} \gamma_{zx} n_x n_z + \frac{1}{2} \gamma_{zy} n_z n_y + \epsilon_z n_z^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_n = \epsilon_x \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots = \frac{1}{3} [5 - 1 - 1 - 1 + 4 + 0 - 1 + 0 + 4] \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-4}$$

б)  $\vec{l} = ?$   $\vec{l} \cdot \vec{n} = 0$ ,  $\vec{l}_z = 0 \Rightarrow l_x n_x + l_y n_y + l_z n_z = 0$   
 $l_x = -l_y \Rightarrow l_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, l_y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\gamma_{ml} = ?$

$$\vec{d}^{(m)} = \epsilon_m \vec{n} + \frac{1}{2} \gamma_{ml} \vec{l} + \frac{1}{2} \gamma_{lm} \vec{n} \quad \frac{1}{2} \gamma_{ml} = \vec{d}^{(m)} \cdot \vec{l} = [d^{(m)}]^T \cdot [l]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{ml} &= \epsilon_x m_x l_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} m_x l_y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} m_x l_z \\ &+ \frac{1}{2} \gamma_{yx} m_y l_x + \epsilon_y m_y l_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} m_y l_z \\ &+ \frac{1}{2} \gamma_{zx} m_z l_x + \frac{1}{2} \gamma_{zy} m_z l_y + \epsilon_z m_z l_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{ml} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [5 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot (-1) + 0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} [5 + 1 - 1 - 4 - 1] = 0 \Rightarrow \gamma_{ml} = 0 \end{aligned}$$

2. начин  $\frac{1}{2} \gamma_{ml} = [m]^T \cdot [D] \cdot [l]$

b)  $\vec{m} \perp \vec{n}, \vec{m} \perp \vec{l} \Rightarrow \vec{m} = \vec{n} \times \vec{l}$   
 $\vec{m} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \vec{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \vec{j} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \vec{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}$   
 $m_x = \frac{1}{\sqrt{6}}, m_y = \frac{1}{\sqrt{6}}, m_z = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \vec{m} \cdot \vec{i} > 0$

$A = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$   $D' = A \cdot D \cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$

$D' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5,5 & 0,776 \\ 0 & 0,776 & 4,5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$

Главне дилатације и правци главних дилатација

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  - главне дилатације

$\epsilon^3 - J_1 \epsilon^2 + J_2 \epsilon - J_3 = 0 \rightarrow \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$

$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

$J_2 = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \epsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix}$

$J_3 = \det [D]$

Правци главних дилатација

$\begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_k & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_k & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_k \end{bmatrix} \quad k=1,2,3$

$C_x^{(k)} = \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_k & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_k \end{bmatrix}$

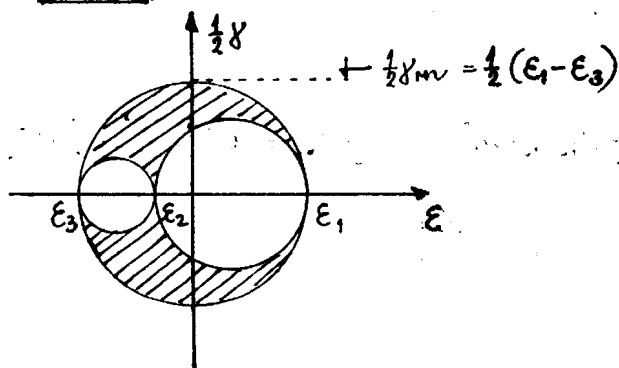
$m_x^{(k)} = \frac{C_x^{(k)}}{\sqrt{(C_x^{(k)})^2 + (C_y^{(k)})^2 + (C_z^{(k)})^2}}$

$C_y^{(k)} = -\begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_k & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \epsilon_z - \epsilon_k \end{bmatrix}$

$m_y^{(k)} = \frac{C_y^{(k)}}{\sqrt{(C_x^{(k)})^2 + (C_y^{(k)})^2 + (C_z^{(k)})^2}}$

$C_z^{(k)} = \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_k & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_k \end{bmatrix}$

$m_z^{(k)} = \frac{C_z^{(k)}}{\sqrt{(C_x^{(k)})^2 + (C_y^{(k)})^2 + (C_z^{(k)})^2}}$



Свакој тачки која се налази само унутар шрафиране површине одговара одређени вектор деформације  $d^{(k)}$ .

Зад. 1. Ситане деформације при такве задајто је тензором деформације D. Одредити правус и величине главних дилатација.

Решенје:  $J_1 = 1+1+6 = 8 \cdot 10^{-6}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+2+(-8) = -4 \cdot 10^{-12}$$

$$J_3 = 1 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 1 \cdot (-2) = -32 \cdot 10^{-18}$$

$$\tilde{\epsilon}^3 - J_1 \tilde{\epsilon}^2 + J_2 \tilde{\epsilon} - J_3 = 0$$

$$\tilde{\epsilon}^3 - 8 \cdot 10^{-6} \tilde{\epsilon}^2 + (-4) \cdot 10^{-12} \tilde{\epsilon} + 32 \cdot 10^{-18} = 0$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \cdot 10^{-6} \Rightarrow 0 = (\tilde{\epsilon} + 2)(\tilde{\epsilon} - 2)(\tilde{\epsilon} - 8)$$

$$\tilde{\epsilon}_1 = 8 \quad \vec{m}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{k}$$

$$\tilde{\epsilon}_2 = 2 \quad \vec{m}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k}$$

$$\tilde{\epsilon}_3 = -2 \quad \vec{m}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

Разлагање на сферни и девијаторски део

Кубна дилатација  $e = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 3\bar{\epsilon} = J_1$

Зад. 1. За тензор деформације D написати сферни и девијаторски део тензора и одредити кубну дилатацију сферног и девијаторског дела.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Решенје:  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{1}{3}(1+1+2) = 2$

$$D^{(s)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{(s)} = (2+2+2) = 6$$

$$D^{(d)} = D - D^{(s)} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{(d)} = 0$$

вежба бр. 7

12. 11. 2007.

Равно ситане деформације

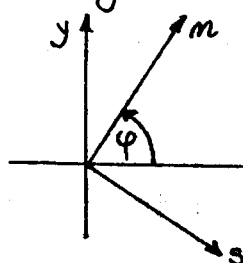
$$\begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \epsilon_x & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{matrix}$$

$$\epsilon_{1,2}^* = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} \text{ - интенсиитет и л. дилатација}$$

$$\text{Rang}[D] = 2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)}{\epsilon_x - \epsilon_y} \begin{matrix} \rightarrow \sin 2\alpha \\ \rightarrow \cos 2\alpha \end{matrix} \text{ - правци и л. дилатација}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

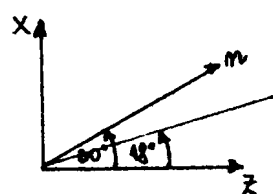


$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{ms} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\varphi$$

- Зад.1. Ситње деформације у некој тачки је задато компонентама тензора деформације  $\epsilon_x = -200 \cdot 10^{-6}$ ,  $\epsilon_z = 1000 \cdot 10^{-6}$ ,  $\gamma_{zx} = 900 \cdot 10^{-6}$
- Одредити дилатацију у правцу осе  $n$  која са осом  $z$  гради угао  $\varphi = 30^\circ$  као и клизање између правца  $n$  и њему утрвањом правца  $l$  ( $\vec{n}$  и  $\vec{l}$  леже у равни  $\perp Oxy$ )
  - Одредити правце и величине главних дилатација
  - Нацртати Морсов круг деформације и одредити  $\gamma_{max}$

Решење:  $D = \begin{bmatrix} -200 & 0 & 450 \\ 0 & 0 & 0 \\ 450 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$  раван у којој се налазе сви вектори деформације је  $\perp Oxy$



$$\epsilon_n = \frac{\epsilon_z + \epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_z - \epsilon_x}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{zx} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{ns} = \frac{\epsilon_z - \epsilon_x}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma_{zx} \cos 2\varphi$$

$$\varphi = 30^\circ \Rightarrow 2\varphi = 60^\circ \Rightarrow \sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 2\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon_n = \left[ \frac{-200 + 1000}{2} + \frac{(1000 - (-200))}{2} \cdot \frac{1}{2} + 450 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cdot 10^{-6} = 1089,71 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{ns} = \left[ \frac{1000 - (-200)}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 450 \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot 10^{-6} = 204,61 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \gamma_{ns} = 589,92 \cdot 10^{-6}$$

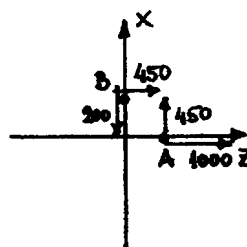
$$\epsilon_{1,2} = \left[ \frac{-200 + 1000}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{1000 - (-200)}{2} \right)^2 + 450^2} \right] \cdot 10^{-6} < \begin{matrix} 1150 \cdot 10^{-6} \\ -350 \cdot 10^{-6} \end{matrix}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot 450}{1000 - (-200)} = \frac{900}{1200} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arctan(0,75) = 18,435^\circ$$

$$\epsilon_1 = 1150 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_2 = 0$$

$$\epsilon_3 = -350 \cdot 10^{-6}$$



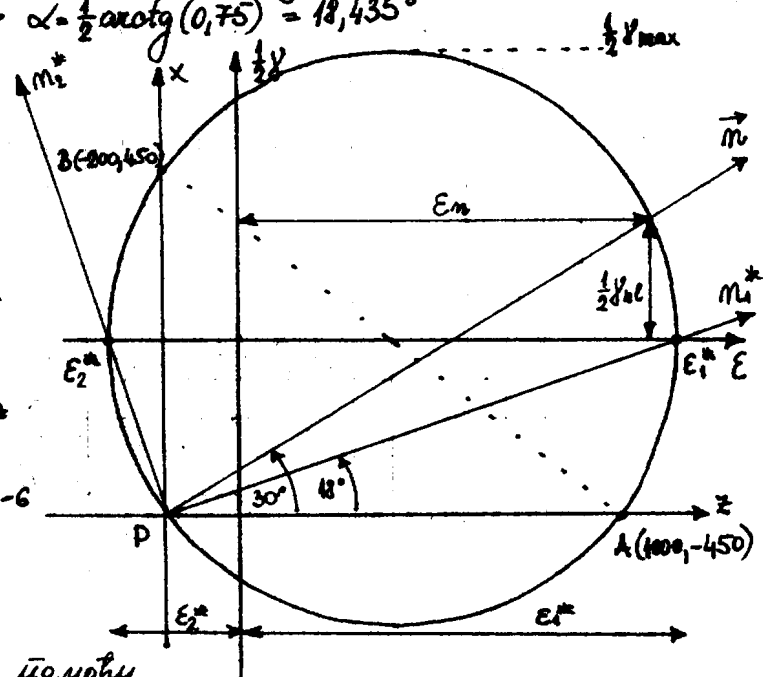
$$\varphi = 0: \epsilon_n = \epsilon_z$$

$$\frac{1}{2} \gamma_n = -\frac{1}{2} \gamma_{zx}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: \epsilon_n = \epsilon_x$$

$$\frac{1}{2} \gamma_n = \frac{1}{2} \gamma_{zx}$$

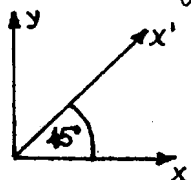
$$\frac{1}{2} \gamma_{max} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \Rightarrow \gamma_{max} = 750 \cdot 10^{-6}$$



Дилатације се могу измерити помоћу лативних прака - ружама. Важе за равно ситње напона.

- Зад.2. Помоћу мерних прака измерене су дилатације за три правца  $x$ ,  $x'$  и  $y$  који међусобно граде углове од  $45^\circ$ . Одредити клизање између правца  $x$  и  $y$  ако су измерене дилатације  $\epsilon_x = 200 \cdot 10^{-6}$ ,  $\epsilon_y = 100 \cdot 10^{-6}$ ,  $\epsilon_{x'} = 50 \cdot 10^{-6}$ . Одредити правце и величину главних дилатација.

Решење:



$$\epsilon_{x'} = \epsilon_n |_{\varphi=45^\circ} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = 0, \sin 2\varphi = 1$$

$$50 = \frac{200 + 100}{2} + \frac{200 - 100}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot 1 \Rightarrow -100 = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy} = -200 \cdot 10^{-6}$$

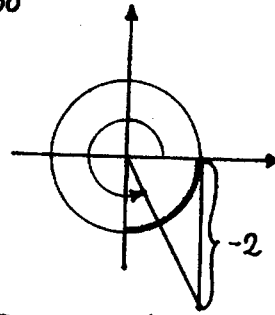
$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} = \frac{200 + 100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200 - 100}{2}\right)^2 + (-100)^2} < 261,8 \cdot 10^{-6}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{2 \cdot (-100)}{200 - 100} = \frac{-200}{100}$$

$$\sin 2\alpha < 0, \cos 2\alpha > 0$$

$$2\alpha = 360 + \arctan(-2) \\ = 360 - \arctan(+2)$$

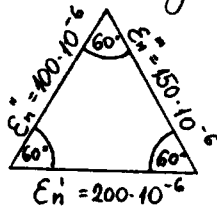
$$\alpha = 148,28^\circ$$



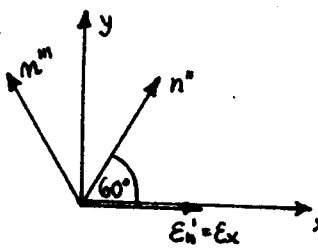
На површини тела је равно ситане деформације.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Зад. 2. Помоћу делта розете измерене су дилатације дуж странаца троугла како је то сликом приказано. Одредити правцу и величину главних дилатација.



Решење:



$$\epsilon_{n'} = 100 = \epsilon_n | \varphi = 60^\circ = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\epsilon_{n''} = 150 = \epsilon_n | \varphi = 120^\circ = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\epsilon_x = \epsilon_{n'} = \epsilon_n | \varphi = 0^\circ = 200$$

$$\begin{bmatrix} 200 & -28,87 & 0 \\ -28,87 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Решавањем система добијамо  $\epsilon_y = 100 \cdot 10^{-6}$ ,  $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = -28,87$   
вредности која ће се показати различитом од нуле

вредности тензора  $\rightarrow$  изводи ф-ја померања

$\begin{matrix} u \rightarrow x \\ v \rightarrow y \\ w \rightarrow z \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{градијентни вектора померања (деформације)}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{симетрични део је} \\ \text{тензор деформације} \\ \text{док је антисиметрич.} \\ \text{вектор ротације} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{matrix} \right.$$

$$\pm \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\pm \omega_y = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\pm \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

## Услови компатибилности (6 услова)

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \quad (6)$$

Зад. 3. Одредити услове које морају задовољавати параметри  $A, B, C$  да би тензор  $D$  био тензор деформације.

$$D = \begin{bmatrix} 2 \cdot x \cdot y \cdot z & A \cdot x^2 \cdot z & B \cdot x^2 \cdot y \\ A \cdot x^2 \cdot z & z^3 & C \cdot y \cdot z^2 \\ B \cdot x^2 \cdot y & C \cdot y \cdot z^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Решење: (1)  $\Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (2Ax^2 - 2 \cdot 0 + 2Bx^2) \Rightarrow 2x = (A+B)x \Rightarrow A+B=2$

(2)  $\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (2Ax^2 + 2 \cdot 0 - 2Bx^2) \Rightarrow 0=0$

(3)  $\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (-2Ax^2 + 2 \cdot 0 + 2Bx^2) \Rightarrow 0=0$

(4)  $\Rightarrow 0 = 0 + 0$

(5)  $\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot zC = 6 \cdot z + 0 \Rightarrow C = \frac{6}{4}$

$A+B=2, \quad C=\frac{3}{2}$

(6)  $\Rightarrow 0 = 0 + 0$

Веза између напона и деформације

Веза између напона и дилатација

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$E$  - Јангов модул еластичности [MPa], [GPa]

$\nu$  - Пуасонов коефицијент,  $\frac{1}{2} \geq \nu > 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{једноосно најпрежане} \\ \sigma_x \neq 0 \\ \sigma_y = \sigma_z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \\ \epsilon_y = \epsilon_z = -\left(\frac{1}{E} \sigma_x\right) \nu \end{array}$$

Веза између смикућег напона и клизања

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$G$  - модул клизања  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{K}$$

$\epsilon$  - релативна промена димензије

$K$  - модул компресије,  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

$$\sigma \rightarrow D \quad \epsilon \rightarrow \tau$$

$$\sigma_x = 2\mu \epsilon_x + \lambda \epsilon$$

$$\sigma_y = 2\mu \epsilon_y + \lambda \epsilon$$

$$\sigma_z = 2\mu \epsilon_z + \lambda \epsilon$$

$$\tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}$$

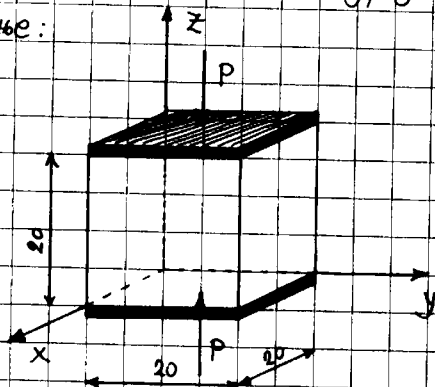
$\mu, \lambda$  - Ламеове константе

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Зад. 1. Коцка ивице 20 cm одликрећена је дејством бесконачно круће силе  $P=20 \text{ kN}$ . Притом се димензија у правцу дејвања силе скратиле за  $\Delta l_z = 3 \text{ mm}$ , а у попречном правцу повећа за 1 mm. Одредити еластичне константе.

Решење:



сила сабуја  $\rightarrow \ominus$   
сила исцеже  $\rightarrow \oplus$

$$\Delta l_z = 3 \text{ mm} \quad \Delta l_x = \Delta l_y = 1 \text{ mm}$$

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{-20 \text{ kN}}{0,2 \cdot 0,2} = \frac{-20000 \text{ N}}{0,04 \text{ m}^2} = -500 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_x = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{-3 \text{ mm}}{20 \text{ cm}} = \frac{-3}{200} = -0,015$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \Rightarrow E = \frac{\sigma_z}{\epsilon_z} = \frac{-500 \text{ kPa}}{-0,015} = 33,33 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_z}{E} = -\nu \epsilon_z$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1 \text{ mm}}{20 \text{ cm}} = \frac{1}{200} = 0,005$$

$$0,005 = -\nu \cdot (-0,015) \Rightarrow \nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_z} = \frac{1}{3}$$

Зад. 2. Поље померања у простору је задато ф-јалом померања

( $u = 2x^2 + y^2$ ,  $v = -\frac{3}{2}xz + \frac{1}{2}y^2 + z$ ,  $w = (3y^2 - 4z) \cdot 10^{-6}$ )

а) Написати тензор деформације

б) Одредити да ли је поље уједначено ситане деформације

в) Показати да су сва померања уједначена кривама  $m = (3i + 4j + k)$

Одредити  $\det[D]$  и показати да је  $\epsilon_k = 0$ .

Решење:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 4x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + (-3x)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = y$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -10y + 1$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -4$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + 0$$

$$D = \begin{bmatrix} 4x & y - \frac{3}{2}x & 0 \\ y - \frac{3}{2}x & y & -5y + \frac{1}{2} \\ 0 & -5y + \frac{1}{2} & -4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\delta) \det[D] = \dots = -8xy - x - 100xy^2 + 4y^2 - 9x^2 \neq 0$$

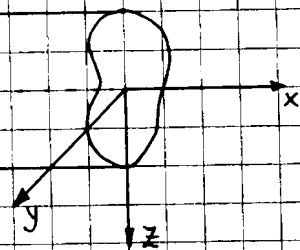
$\Rightarrow$  за произвољне вредности  $x, y$  и  $z$  није равно ситане

$$в) (u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k) \cdot (3i + 4j + k) = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{d}^{(m)} = [D] \cdot [m] = \dots = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 6x + 4y \\ 2y - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ -2 - 10y \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

јед. вектор

## Линейно сматње тредної носача



$$\hookrightarrow \sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{J_y} z \pm \frac{M_z}{J_z} y \quad (*)$$

(важли само ако су у и з главне центральне осе инерције поперечної тресека)

знак „-“ се односи на леву основу треде, знак „+“ на десну

Израз (\*) односи се на највишійуи случај отхорешеня треде подуженнім силам и одговара ексцентричному напрезанью треде ( $N \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0$ ). Осим ової највишійуи случаја отхорешеня, можуть су и следили специјални случајеви:

1° Аксијално напрезанье треде ( $N \neq 0, M_z = 0, M_y = 0$ ) своди се само на норм. силу

2° Чисто савијанье треде ( $N = 0$ ) савијанье без поперечне силе  
Овде разликујемо два случаја

а) Чисто право савијанье треде

Овде чисто савијанье само око једне од главних осе инерције поперечної тресека треде.

б) Чисто косо савијанье треде

У овом случају су моменти савијанья око обої главне осе инерције поперечної тресека различити од нуле ( $M_y \neq 0, M_z \neq 0$ )

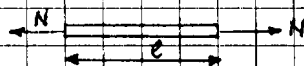
## Аксијално напрезанье треде

Постіюи само нормална сила:  $N \neq 0, M_y, M_z, T_y, T_z, M_T \equiv 0$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad \sigma_x \quad} \\ \boxed{\quad \quad \quad} \end{array} \quad \frac{dN}{dx} = -q_x \Rightarrow \text{интеграција} \Rightarrow N = -\int q_x dx + C_1$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} (\pm 0 \pm 0) \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{AE}$$

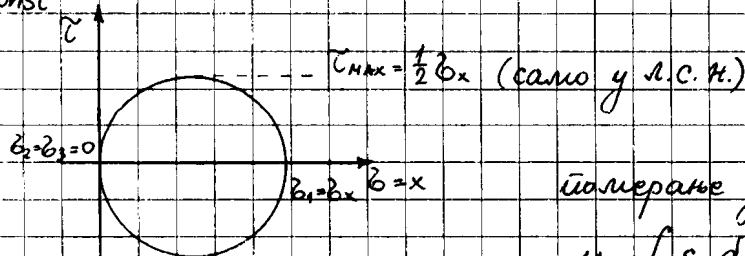
1°  $N = \text{const}$



$$\Delta l = \epsilon_x \cdot l = \frac{Nl}{AE}$$

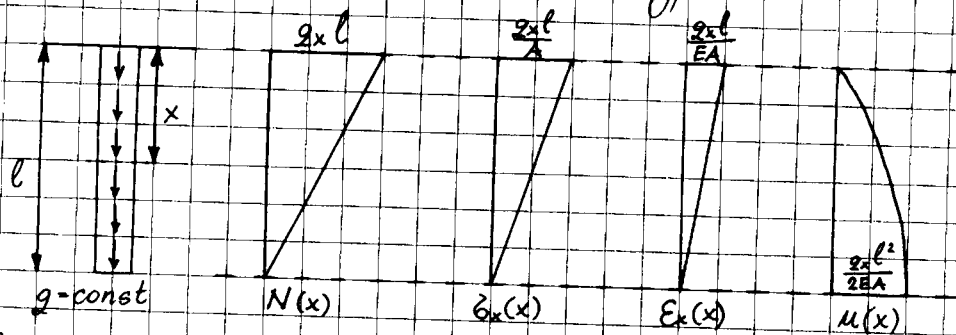
$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

2°  $N \neq \text{const}$



померанье у правуу осе цитайна и  
 $u = \int \epsilon_x dx + C_2$

Зад. 1. Штійай константної поперечної пресека са укльшеним краєм є оймережен једнако расіореженім оймереженім  $q_x = \text{const}$ . Одредити ф.је  $N(x)$ ,  $\sigma_x(x)$ ,  $\epsilon_x(x)$  и  $u(x)$  и науритати кривоє дуаіраме



Решение:  $\frac{dN}{dx} = -q_x \Rightarrow N = -\int q_x dx + C_1 = -q_x x + C_1$

Гранични услов  $N(x=l)=0 \Rightarrow 0 = -q_x l + C_1 \Rightarrow C_1 = q_x l \Rightarrow N = q_x (l-x)$

$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{q_x (l-x)}{A}$

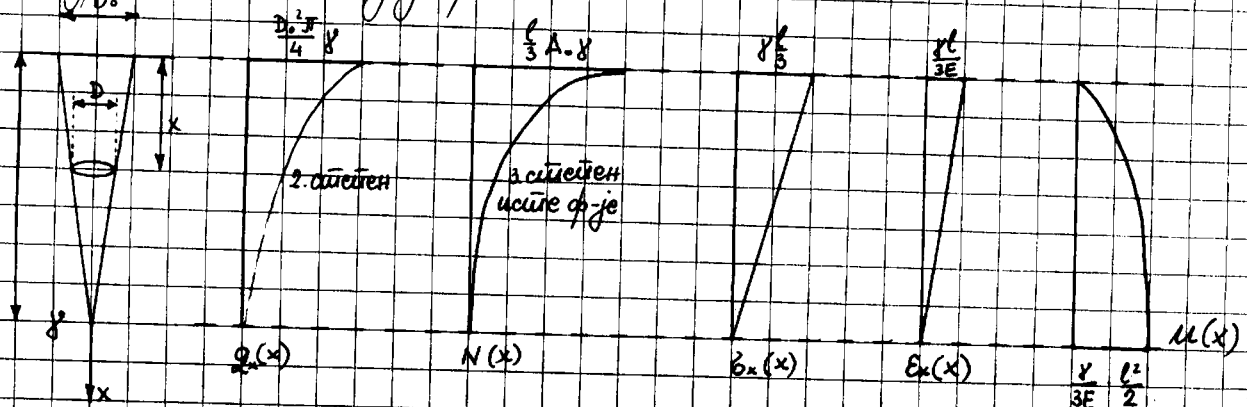
$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{q_x (l-x)}{E \cdot A}$

$u = \int \epsilon_x dx + C_2 = \int \frac{q_x (l-x)}{E \cdot A} dx + C_2 = \frac{q_x}{EA} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_2$

$u(x=0)=0 \Rightarrow C_2=0$

$u(x=l) = \frac{q_x}{EA} \cdot \frac{l^2}{2}$

Зад. 2. Штійай облика конуса є укльшеним једним краєм и оймережен сойственім шеежином. Одредити ф.је нормалне силе и померања и науритати кривоє дуаіраме



Решение:  $D(x) = D_0 \cdot \frac{(l-x)}{l}$ ,  $A = \frac{D^2 \pi}{4} \Rightarrow A = A_0 \cdot \left( \frac{l-x}{l} \right)^2$

$q_x = A \cdot \gamma = A_0 \cdot \left( \frac{l-x}{l} \right)^2 \gamma$

$N = -\int q_x dx + C_1 = -\int \left( \frac{l-x}{l} \right)^2 A_0 \gamma \frac{dx}{l} + C_1 \Rightarrow N = \left( \frac{l-x}{l} \right)^3 \cdot \frac{l}{3} \cdot A_0 \cdot \gamma + C_1$

Гранични услов  $N(x=l)=0 \Rightarrow C_1=0$

$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{\left( \frac{l-x}{l} \right)^3 \cdot \frac{l}{3} \cdot A_0 \cdot \gamma}{A_0 \cdot \left( \frac{l-x}{l} \right)^2} = \frac{l}{3} \gamma \left( \frac{l-x}{l} \right) = \frac{\gamma}{3} (l-x)$

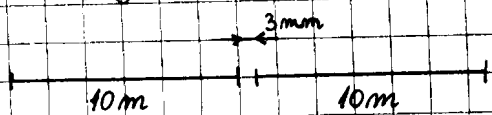
$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\gamma}{3E} (l-x)$

$u = \int \epsilon_x dx + C_2 = \int \frac{\gamma}{3E} (l-x) dx + C_2 = \frac{\gamma}{3E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_2$

$u(x=0)=0 \Rightarrow C_2=0 \Rightarrow u(x) = \frac{\gamma}{3E} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$

Зад. 3. Железничке шине дужине 10m се постављају при температури  $t^0 = 20^{\circ}\text{C}$  са зазором  $\delta = 3\text{mm}$ . Наћи температуру  $t$  при којој ће нестати зазор.

Решење:



$$\epsilon_x = \epsilon_x(z) + \alpha_t \Delta t$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y(z) + \alpha_t \Delta t$$

$$\epsilon_z = \epsilon_z(z) + \alpha_t \Delta t$$

$$\alpha [^{\circ}\text{C}^{-1}] \cdot 10^{-5}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{10} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha_t = 1,25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

$$\Delta t \cdot \alpha_t = \epsilon \Rightarrow \Delta t = \frac{\epsilon}{\alpha_t} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1,25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}} = 24^{\circ}\text{C}$$

$$t = t^0 + \Delta t = 20 + 24 = 44^{\circ}\text{C}$$

Место прво сабирање

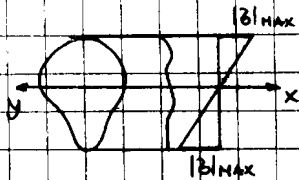
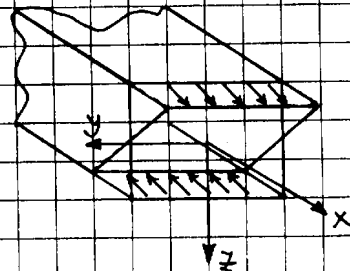
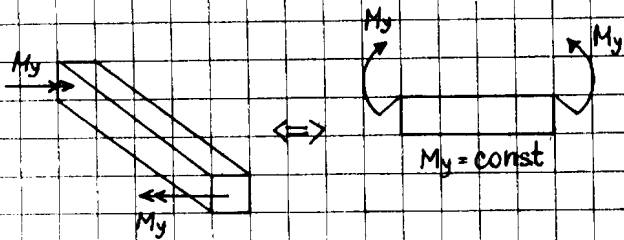
$$\sigma_x = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{J_y} z \pm \frac{M_z}{J_z} y$$

$$N=0$$

$$T_y = T_z = M_z = 0$$

$$M_y \neq 0$$

$\Rightarrow \sigma_x = \pm \frac{M_y}{J_y} z$  ( $M_y = \text{const}$ )  
(у је главна централна оса инерције)



Екстремне вредности нормалног напона су у влакнима која су најудаљенија од централне осе.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_y}{W_y}$$

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\text{max}}}$$

- омиорни моменти пресека за влакно  $[\text{cm}^3], [\text{m}^3]$   
( $z_d$  и  $z_g$  представљају растојања крајњих влакана од централне осе)

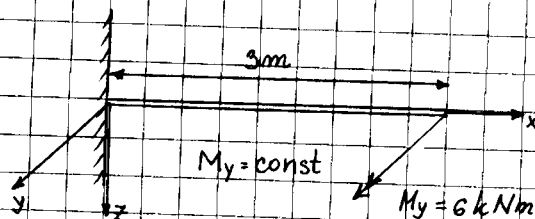
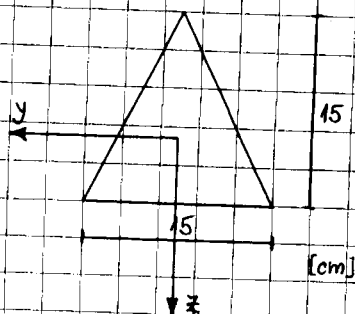
$$W_y^g = \left| \frac{J_y}{z_g} \right|$$

$$W_y^d = \left| \frac{J_y}{z_d} \right|$$

При димензионисању захтева се да највећи нормални напон по апсолутној вредности не прекорачи дозвољену вредност напона  $\sigma_d$

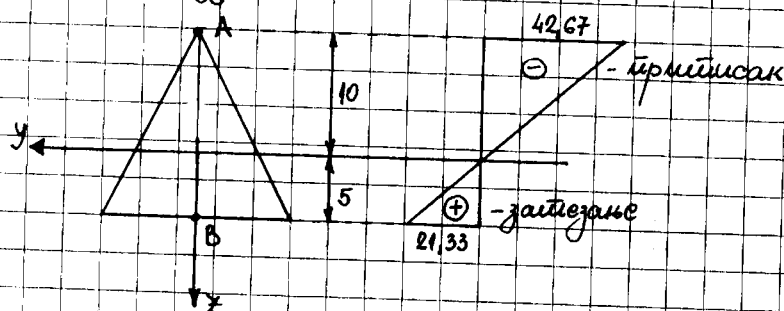
$$\sigma_{x, \text{max}} = \frac{M_y}{J_y} z_{\text{max}} = \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_d$$

Зад. 1. Конзолни штаб израђеног поправног пресека оштришен је на крају срећом пуи је момент  $M_y = 6 \text{ kNm}$ . Одредити  $\sigma_{\text{max}}$  и  $\tau_{\text{max}}$  у штабу.



Решење: у и з су главне центриране осе инерције  $\Rightarrow$  линео право савујање

$$J_y = \frac{1}{36} \cdot 15 \cdot 15^3 = 1406,25 \text{ cm}^4$$



$$W_{y^g} = \frac{J_y}{|z|^g} = \frac{1406,25}{10} = 140,625 \text{ cm}^3$$

$$W_{y^d} = \frac{J_y}{|z|^d} = \frac{1406,25}{5} = 281,25 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_x(z) = \oplus \frac{M_y}{J_y} z = \frac{6000}{1406,25 \cdot 10^{-8}} z$$

( $\oplus$  јер је истегнути доо у смеру z-осе)

$$|\sigma_x^g| = \frac{M_y}{W_{y^g}} = \frac{6000}{140,625 \cdot 10^{-6}} = 42,67 \text{ MPa}$$

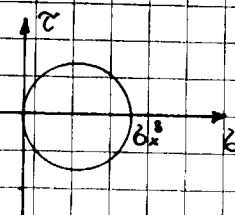
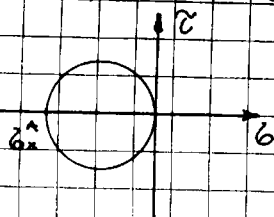
$$|\sigma_x^d| = \frac{M_y}{W_{y^d}} = \frac{6000}{281,25 \cdot 10^{-6}} = 21,33 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_x|_{\text{max}} = |\sigma_x^g| = 42,67 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2} |\sigma_x|_{\text{max}} = 21,33 \text{ MPa}$$

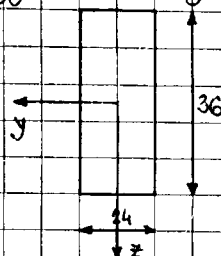
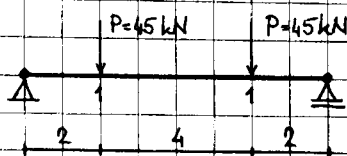
$$\sigma_{x \text{ min}} = 21,33 \text{ MPa} = \sigma_x^b$$

$$\tau_{\text{min}} = 10,67 \text{ MPa}$$



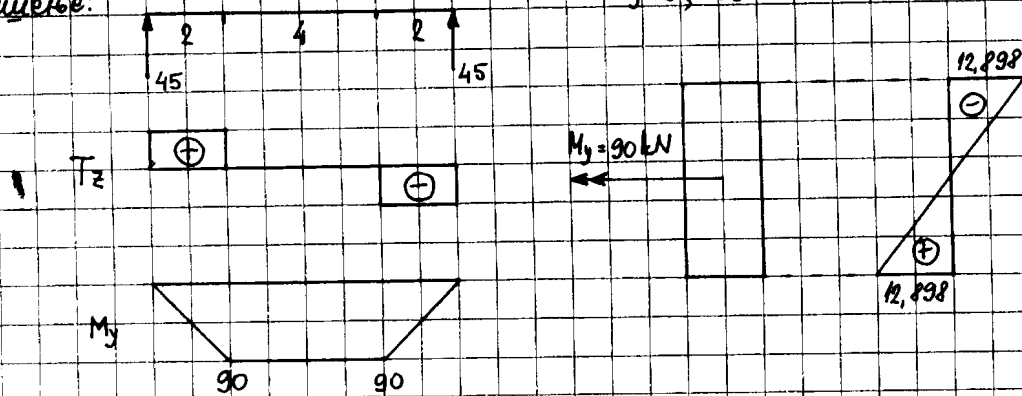
Зад. 2. Гростна грета АВ оштришена је према слици

- Проверити стање напона у пресеку 1-1 и између концентрисаних сила
- Одредити пресек 1-1 уколико је  $\sigma_{\text{max}} > \sigma_{\text{доп}}$  симетричним ламелана дебљине  $d = 2 \text{ cm}$  тако да  $\sigma_{\text{max}}$  буде мање од  $\sigma_{\text{доп}}$  које износи  $13 \text{ MPa}$



Решение:

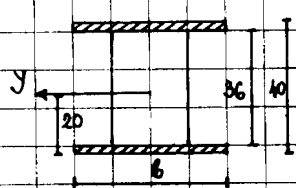
$M_y \neq 0, T_z = 0 \Rightarrow$  лисно савијање



$$J_y = \frac{1}{12} \cdot 24 \cdot 36^3 = 93\,312 \text{ cm}^4$$

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{93\,312}{18} = 5184 \text{ cm}^3$$

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{90000}{5184 \cdot 10^{-6}} = 17,361 \text{ MPa} > \sigma_{\text{доп}} = 13 \text{ MPa}$$



$$J_y' = J_y + \frac{1}{12} (b \cdot 40^3 - b \cdot 36^3)$$

$$= 93\,312 + b \left( \frac{40^3 - 36^3}{12} \right) = 93\,312 + 1445,33 b$$

$$W_y' = \frac{J_y'}{z_{\max}} = \frac{93\,312 + 1445,33 b}{20} \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\frac{M_{\max}}{W_y'} = \sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{доп}} = 13 \cdot 10^6$$

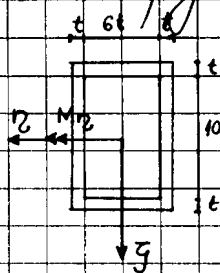
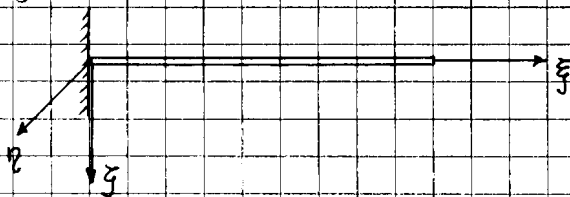
$$\frac{90 \cdot 10^3}{(10^{-6}) \frac{93\,312 + 1445,33 b}{20}} \leq 13 \cdot 10^6 \Rightarrow \frac{90 \cdot 10^3}{13} \cdot 20 \leq 93,312 \cdot 10^3 + 1445,33 b$$

$$b \geq 34,237 \text{ см, усвајамо } b = 32 \text{ см}$$

$$W_y^{\text{ств}} = \frac{93\,312 + 1445,33 b}{20} = 6\,978 \text{ см}^3$$

$$\sigma_x^{\text{ств}} = \frac{90 \cdot 10^3}{6\,978 \cdot 10^{-6}} = 12,898 \text{ MPa}$$

Зад. 3. Носач је обликован моментом интензивитета  $M_0 = 60 \text{ kNm}$ . Димензионисати носач тако да  $\tau_{\max}$  не пређе вредности  $\tau_{\text{доп}}$  које износи  $80 \text{ MPa}$ .



$$\text{Решение: } \sigma_{\xi} = \frac{M_0}{J_0} \eta = \frac{M_0}{W_0}$$

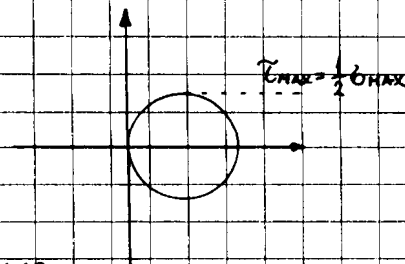
$$J_0 = \frac{1}{12} (8t(12t)^3 - 6t(10t)^3) = 652t^4$$

$$W_0 = \frac{J_0}{\eta_{\max}} = \frac{652t^4}{6t} = 108,67t^3$$

$$\frac{1}{2} \sigma_{\max} \leq 80 \text{ MPa} \Rightarrow \frac{M_0}{W_0} = \frac{60 \cdot 10^3}{108,67t} = \sigma_{\max} \leq 160 \text{ MPa}$$

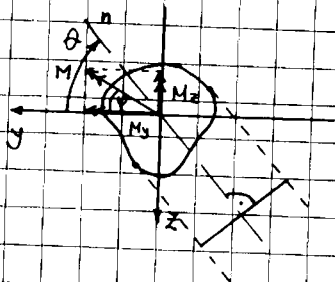
$$t^3 \geq \frac{60 \cdot 10^3}{108,67 \cdot 160} \Rightarrow t \geq 1,511 \Rightarrow \text{усвајамо } t = 1,55 \text{ см}$$

$$W_0^{\text{ств}} = 108,67 \cdot 1,55^3 = 404,67 \text{ см}^3 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{1}{2} \frac{60 \cdot 10^3}{404,67 \cdot 10^{-6}} = 74,13 \text{ MPa} \leq 80$$



# Чисто косо савијање

У правоугаој лекарици разматрали смо случај чистој правој савијања која се јавља када момент савијања делује око једне од главних оса покретног пресека преде у правоугаој, иако момент савијања не делује ни око једне од главних оса инерције имало случај чисто косо савијања преде.



$$M_y = M \cos \varphi \quad M_z = M \sin \varphi$$

$$\sigma_x = \pm \frac{M_y}{J_y} z \pm \frac{M_z}{J_z} y \quad (\text{у случају на слици оба } +)$$

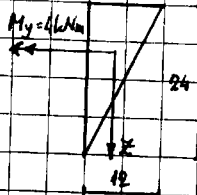
$$\sigma_x = 0 \quad - \text{неутрална линија}$$

$$\frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y = 0 \Rightarrow M \left( \frac{\cos \varphi}{J_y} z + \frac{\sin \varphi}{J_z} y \right) = 0$$

$$z = - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{J_y}{J_z} y = - \tan \varphi \cdot \frac{J_y}{J_z} y \Rightarrow \tan \theta = \tan \varphi \cdot \frac{J_y}{J_z}$$

Значи да урмало у односу на неутралну осу (један). Може и у односу на главне осе (два) али то се морамо да савирамо.

Зад. 1. Штат АВ изложен је савијању силама  $M_y$  према слици. Одредити  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  Како је покретни пресек 1-1.



у-оса није главна централна оса

$$\text{Решење: } J_y = \frac{1}{36} \cdot 12 \cdot 24^3 = 4608 \text{ cm}^4$$

$$J_z = \frac{1}{36} \cdot 24 \cdot 12^3 = 1152 \text{ cm}^4$$

$$J_{yz} = + \frac{1}{72} \cdot 12^2 \cdot 24^2 = 1152 \text{ cm}^4$$

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2} = \frac{4608 + 1152}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{4608 - 1152}{2} \right)^2 + 1152^2}$$

$$\tan 2\alpha = - \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 1152}{4608 - 1152} = -0,6667 \quad (\sin 2\alpha < 0, \cos 2\alpha > 0)$$

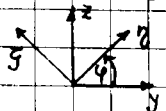
$$\alpha = \frac{1}{2} [360^\circ + \arctan(-0,6667)] = 163,15^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 163,15^\circ = 16,85^\circ$$

$$M_{\eta} = M_y \cos \theta, \quad M_{\xi} = M_y \sin \theta$$

$$\sigma_x = - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}} \xi + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}} \eta = 0 \quad (\text{m-m osa})$$

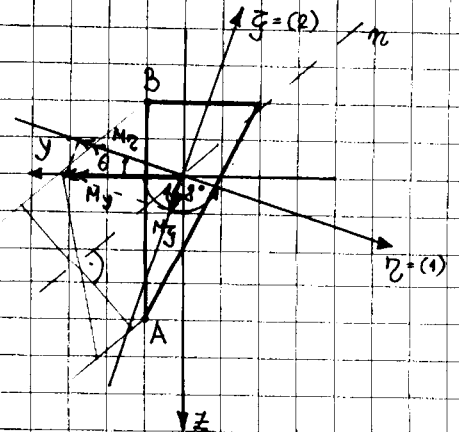
$$\xi = \frac{M_{\xi}}{M_{\eta}} \cdot \frac{J_{\eta}}{J_{\xi}} \cdot \eta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{4956,8}{803,2} = 1,868 \eta$$



$$\eta = y \cos \varphi + z \sin \varphi$$

$$\xi = -y \sin \varphi + z \cos \varphi$$

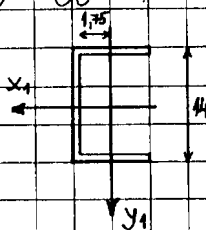
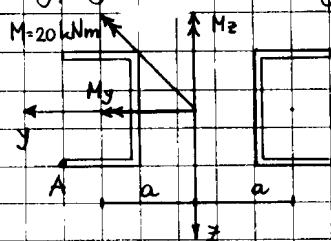
$$A: \begin{cases} y=4 \\ z=16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \eta_1 = 0,808 \\ \xi_1 = -16,432 \end{cases} \quad B: \begin{cases} \eta_2 = 6,117 \\ \xi_2 = 6,432 \end{cases}$$



$$\sigma_x = -\sigma_x^B = +4 \cdot 10^3 \cdot \left[ - \frac{\cos 16,85}{4956,8} \cdot (-16,432) + \frac{\sin 16,85}{803,2} \cdot 0,808 \right] \cdot 10^6 = 13,89 \cdot 10^6$$

# Наставак

2. Носач подијелног пресека приказаног на слици одликује се на косо савијање. Даван савијања брзи са осом у углов  $\varphi = 45^\circ$ .  
Одредити растојање  $2a$  између профила тако да је  $\sigma_{\max} < \sigma_{\text{доп}} = 140 \text{ MPa}$



$$\begin{aligned} J_{x_1} &= 605 \text{ cm}^4 \\ J_{y_1} &= 62,7 \text{ cm}^4 \\ A &= 20,4 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Решење:  $J_y = 2J_{x_1} = 2 \cdot 605 \text{ cm}^4 = 1210 \text{ cm}^4$

$$J_z = 2[62,7 + a^2 \cdot 20,4] = 125,4 + 40,8 a^2$$

$$A: y^* = 4,25 + a \text{ cm} \quad z^* = 7 \text{ cm}$$

$$M_y = M_z = M \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_x = + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y$$

$$20000 \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{7}{1210} + \frac{4,25+a}{125,4+40,8a^2} \right) \cdot 10^6 \text{ Pa} \leq 140 \text{ MPa}$$

$$\frac{7}{1210} + \frac{4,25+a}{125,4+40,8a^2} \leq \frac{140\sqrt{2}}{20000}$$

$$\frac{4,25+a}{125,4+40,8a^2} < \frac{140\sqrt{2}}{20000} - \frac{7}{1210}$$

$$4,25+a < ( ) (125,4 + 40,8a^2)$$

$$\Rightarrow 0,1678 a^2 - a - 3,734 \geq 0 \Rightarrow a_1 = 8,65 \text{ - усвајамо, } a_2 = -2,6 < 0$$

$$J_y^{\text{IV}} = 1210$$

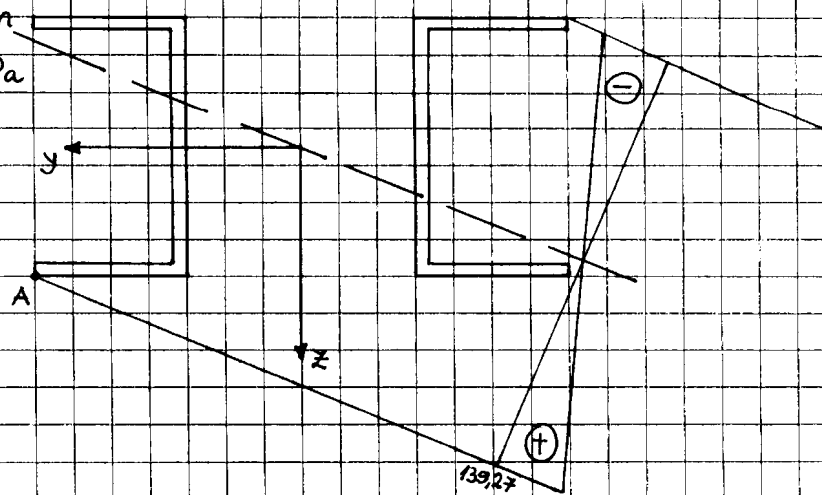
$$J_z^{\text{IV}} = 125,4 + 40,8 \cdot 8,65^2 = 3178,15$$

$$n-n: z = - \frac{J_y}{J_z} y = - \frac{1210}{3178,16} y = -0,38y$$

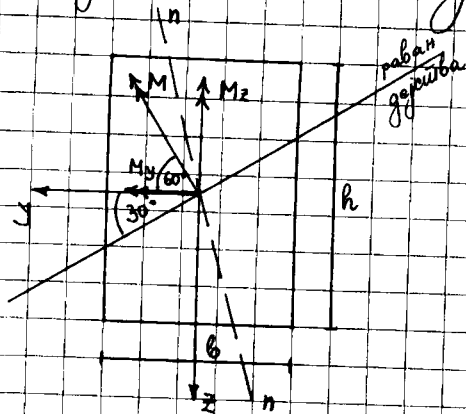
$$A: y = 12,9; z = 7$$

$$\sigma_x^* = 139,27 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_{\max} = 69,61 \text{ MPa}$$



Зад. 3. Грета правоугаоне попречног пресека односа ширине  $b/h = 5/7$  изложено је најпрезању на тачно косо савијање моментом савијања  $M = 60 \text{ kNm}$ . У равни дејства момента крај са осом  $y$  закљача угао  $\varphi = 30^\circ$ . Димензионисати греду тако да  $\sigma_{\max} < \sigma_{\text{доп}} = 12 \text{ MPa}$ .



Решење:  $M_y = M \sin 30^\circ$   $M_z = M \cos 30^\circ$

$$\sigma_x = M \left( \frac{\sin 30^\circ}{J_y} z + \frac{\cos 30^\circ}{J_z} y \right)$$

$$n-n: \sigma_x = 0 \Rightarrow z = - \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{J_y}{J_z} \cdot y = -3,4y$$

$$\left( \begin{matrix} J_y = \frac{1}{12} b h^3 \\ J_z = \frac{1}{12} h b^3 \end{matrix} \right) \frac{J_y}{J_z} = \frac{h^2}{b^2} = \left( \frac{7}{5} \right)^2$$

$$\sigma_x = 60000 \left( \frac{1/2}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{1}{12} h b^3} \cdot h \right) \leq 12 \text{ MPa}$$

$$60000 \left( \frac{1 \cdot 12}{4 b^2 h^2} \cdot b + \frac{12 \sqrt{3}}{b^2 h^2} \cdot h \right) \leq 12 \text{ MPa}$$

$$b \cdot \frac{7}{5} = h \Rightarrow 14b = h \Rightarrow 3 \cdot 60000 \left( \frac{7}{5 h^3} + \frac{49 \sqrt{3}}{25 h^3} \right) \leq \sigma_{\text{доп}}$$

$$h^3 \geq \frac{3 \cdot 60000}{12 \cdot 10^6} \left( \frac{7}{5} + \frac{49 \sqrt{3}}{25} \right) \Rightarrow h \geq 0,4158$$

$$\text{узимамо } h = 42 \text{ cm} \Rightarrow b = 30 \text{ cm}$$

$$\sigma_{x, \text{ств}} = 11,639 \text{ MPa} < 12 \text{ MPa}$$

### Ексцентрично најпрезање греде

Настаје ако је греду ритирексна на крајевима подужном силом која не пролази кроз центар попречног пресека и представља комбинацију аксијалног најпрезања и косо (косо) савијања

$$\left. \begin{matrix} N \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\} \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \quad (\text{ако заједно позитивну } y \text{ и позитивну } z \text{ осу})$$

$$\left. \begin{matrix} N = P \\ M_y = P \cdot e_z \\ M_z = P \cdot e_y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot e_z}{J_y} z + \frac{P \cdot e_y}{J_z} y \quad (e_y \text{ и } e_z \text{ су координате тачке } y \text{ и } z \text{ у којој дејује сила})$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{e_z \cdot z}{\frac{J_y}{A}} + \frac{e_y \cdot y}{\frac{J_z}{A}} \right) = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2} \right)$$

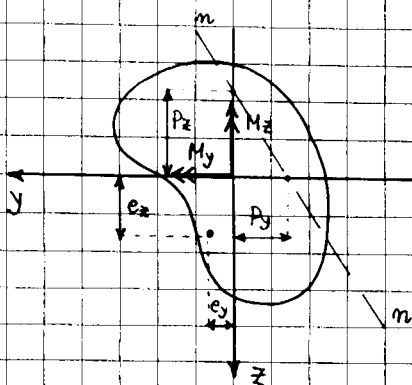
$$n-n: \sigma_x = 0 \Rightarrow -1 = \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2} \quad \text{— једначина праве}$$

$$y = 0 \rightarrow p_z = - \frac{i_y^2}{e_z}$$

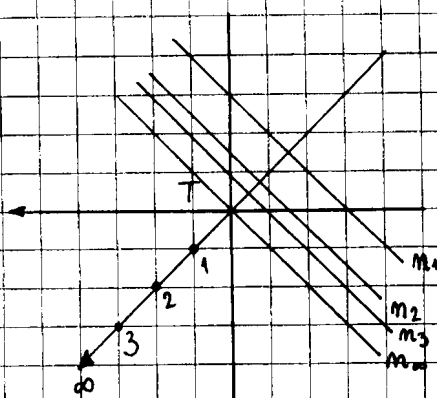
$$z = 0 \rightarrow p_y = - \frac{i_z^2}{e_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} \left( 1 - \frac{z}{p_z} - \frac{y}{p_y} \right)$$

( $p_y$  и  $p_z$  су одреци неутралне осе на координатним осяма  $x$  и  $y$ )

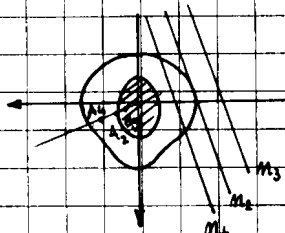


Ако се најадна тачка силе налази на једној од главних ос  $x$  инерције, на пример, на оси  $z$  ( $e_y = 0$ ), тада је одговарајућа неутрална оса  $n$  паралелна  $y$  оси



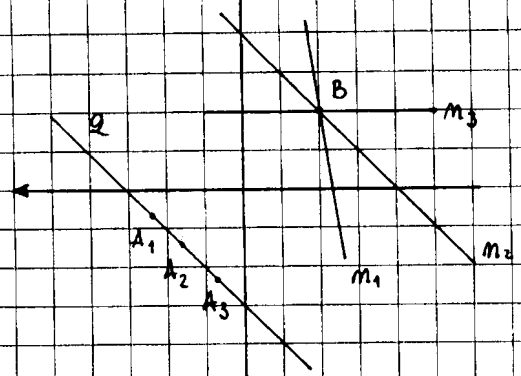
са повећанем  $e_y$  и  $e_z$  к нула  
одсеци  $p_y$  и  $p_z$  се смањују к нула

$$e_y : e_z = \text{const} \Rightarrow p_y : p_z = \text{const}$$



језро пресека

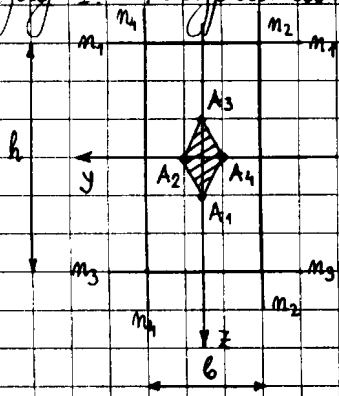
(ако  $A$  је језру цео  
пресек је или при-  
падни или зависни)



ако се нападна тачка силе поме-  
ра дуж неке праве  $z$  која не про-  
лази кроз тежишће покретног  
пресека, тада се одговарајућа  
неутрална оса одређује окретање  $B$ ,  
где је  $B$  нападна тачка силе за  
коју је права  $z$  неутрална оса

$$P \text{ у } B \Rightarrow m-m=Q$$

Зад. 1. Нацртајте језро правоугаоног пресека.



Решење:

$$A = b \cdot h$$

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{h^2}{12}$$

$$J_z = \frac{b^3h}{12} \Rightarrow i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{b^2}{12}$$

$$m_1 - m_4: \begin{cases} p_y = \infty \\ p_z = -\frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_y = -\frac{i_z^2}{p_z} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{-\frac{h}{2}} = \frac{bh}{6} \\ e_z = -\frac{i_y^2}{p_y} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{\infty} = 0 \end{cases}$$

$$m_2 - m_3: \begin{cases} p_y = -\frac{b}{2} \\ p_z = \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_y = -\frac{i_z^2}{p_z} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{\infty} = 0 \\ e_z = -\frac{i_y^2}{p_y} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{-\frac{b}{2}} = \frac{bh}{6} \end{cases}$$

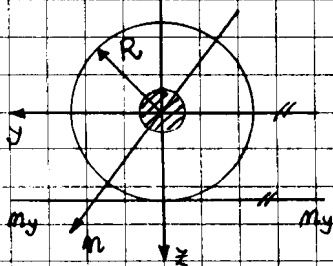
$$m_3 - m_4: \begin{cases} p_y = \infty \\ p_z = \frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_y = 0 \\ e_z = -\frac{bh}{6} \end{cases}$$

$$m_1 - m_2: \begin{cases} p_y = \frac{b}{2} \\ p_z = \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_y = -\frac{bh}{6} \\ e_z = 0 \end{cases}$$

Зад. 2. Нацртајте језро кружног покретног пресека.



Решење:

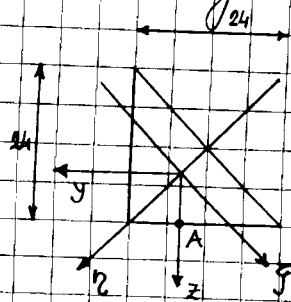
$$J_y = J_z = J_m = \frac{R^4 \pi}{4}$$

$$A = R^2 \pi$$

$$e_z = -\frac{i_y^2}{p_z} = -\frac{\frac{R^4}{4}}{R} = -\frac{R}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} J_y &= J_z = J_m = \frac{R^4 \pi}{4} \\ A &= R^2 \pi \end{aligned} \right\} i_y^2 = i_z^2 = i_m^2 = \frac{R^2}{4}$$

Зад. 3. За правоугаони пресек задати према скици који је изложен ексцентриситетом правоугаоног силама  $P$  са највећом тачком  $A$  одређити величину  $P$  тако да  $\tau_{\max} = \tau_{\text{доп}} = 8 \text{ MPa}$  и највећим језгро пресека.



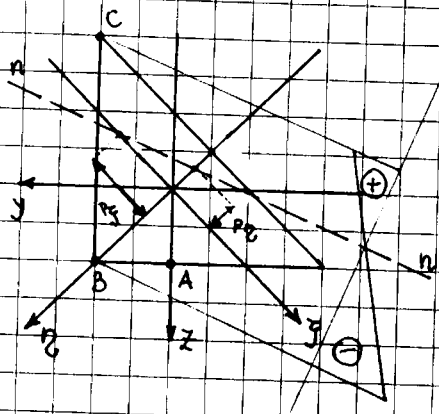
Решење: Прво одређимо геометријске карактеристике

$$J_z^* = \frac{1}{12} J_z^* = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot 24^4 = 24^3 = 13824 \text{ cm}^4$$

$$J_y^* = \frac{1}{36} \cdot (24\sqrt{2}) (12\sqrt{2})^3 = 4688 \text{ cm}^4$$

$$i_z^2 = \frac{J_z^*}{A} = \frac{13824}{288} = 48 \text{ cm}^2$$

$$i_y^2 = \frac{J_y^*}{A} = \frac{4688}{288} = 16,28 \text{ cm}^2$$



$$\left. \begin{aligned} r_A &= \frac{8}{\sqrt{2}} \\ r_A &= \frac{8}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_z &= -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{16,28}{8/\sqrt{2}} = -2,88 \\ p_y &= -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{48}{8/\sqrt{2}} = -8,48 \end{aligned}$$

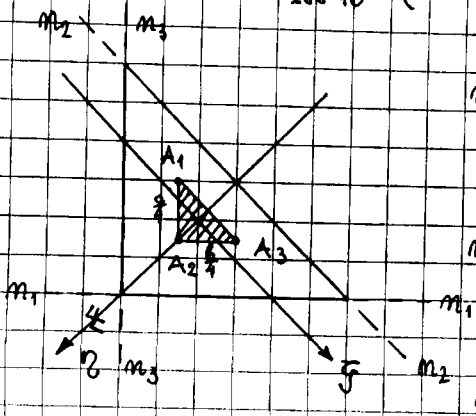
$$\left. \begin{aligned} B: r^B &= 8\sqrt{2} \\ r^B &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} b_x &= -\frac{P}{A} \left( 1 - \frac{2,88 \cdot 8\sqrt{2}}{16,28} - 0 \right) \\ b_x &= -\frac{N}{A} \left( 1 - \frac{p_z r}{i_y^2} - \frac{p_y r}{i_z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} |b_x|_{\max} = \tau_{\max} \leq \tau_{\text{доп}} = 8 \text{ MPa}$$

$$\frac{P}{288 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{2,88 \cdot 8\sqrt{2}}{16,28} \right) \leq 16 \cdot 10^6 \text{ MPa}$$

$$P \leq 93,951 \cdot 10^3 \rightarrow \text{узимајемо } P = 93 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{сгн}} = \frac{1}{2} \frac{93 \cdot 10^3}{288 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{2,88 \cdot 8\sqrt{2}}{16,28} \right) = 7,962$$



$$\left. \begin{aligned} m_1 - m_1: p_z^I &= 8\sqrt{2} \\ p_y^I &= 8\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} e_z^I &= -\frac{i_y^2}{p_z^I} = -\frac{16,28}{8\sqrt{2}} = -1,44 \\ e_y^I &= -\frac{i_z^2}{p_y^I} = -\frac{48}{8\sqrt{2}} = -4,24 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 - m_2: p_z^{II} &= -4\sqrt{2} \\ p_y^{II} &= -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} e_z^{II} &= \frac{-16,28}{-4\sqrt{2}} = 2,88 \\ e_y^{II} &= \frac{-48}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$m_3 - m_3 \text{ и } m_1 - m_1$$

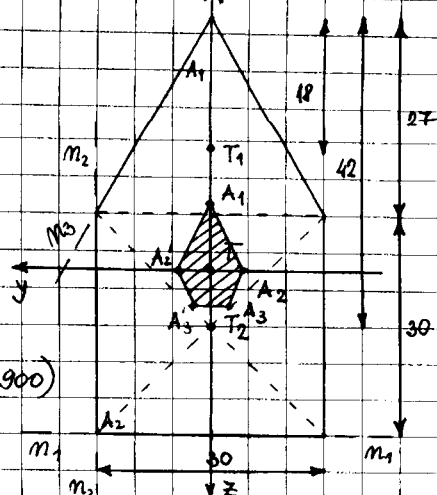
Зад. 4. За правоугаони пресек на скици највећим језгро пресека.

Решење:  $A_1 = 405$   $A_2 = 900$   $A = 1305$

$$\bar{z}_T = \frac{18 \cdot 405 + 900 \cdot 42}{1305} = 34,55$$

$$J_y = \left( \frac{1}{36} \cdot 30 \cdot 27^2 + 16,55^2 \cdot 405 \right) + \left( \frac{1}{12} \cdot 30^4 + 7,45^2 \cdot 900 \right) = 244785$$

$$J_z = \frac{1}{48} \cdot 27 \cdot 30^3 + \frac{1}{12} \cdot 30^4 = 82687$$



$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{244785}{1305} = 187,37$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{82687}{1305} = 63,362$$

$$m_1 - m_1: \left. \begin{array}{l} P_y = \infty \\ P_z = 22,45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e_y = -\frac{i_z^2}{P_y} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0 \\ e_z = -\frac{i_y^2}{P_z} = -\frac{187,37}{22,45} = -8,96 \end{array} \right\}$$

$$m_2 - m_2: \left. \begin{array}{l} P_y = 15 \\ P_z = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e_y = -\frac{63,362}{15} = -4,22 \\ e_z = -\frac{187,37}{\infty} = 0 \end{array} \right\}$$

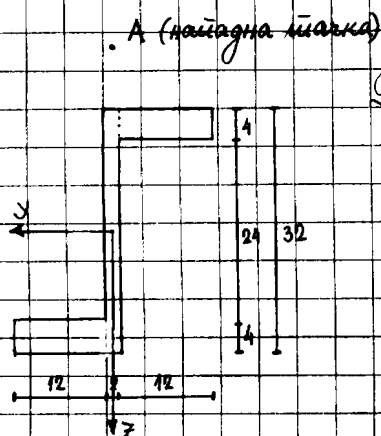
$$m_3 - m_3: \left. \begin{array}{l} P_y = 15 = 34,55 : 27 \Rightarrow p_y = \frac{15 \cdot 34,55}{27} = 19,19 \\ P_z = -34,55 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e_y = -\frac{63,362}{19,19} = -3,3 \\ e_z = -\frac{187,37}{-34,55} = 5,43 \end{array} \right\}$$

вектора др. 10

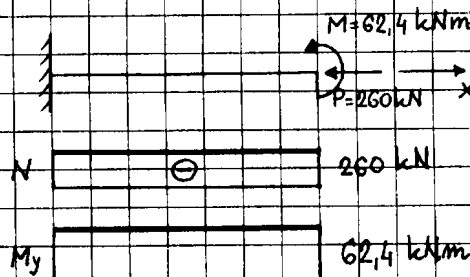
03.12.2007

## Наставак

Зад. 5. Нацртајте дијаграм нормалног напона и одредите максималну вредност близу њега.



Решение:



$$\left. \begin{array}{l} M_y = 62,4 \text{ kNm} \\ N = -260 \text{ kN} \end{array} \right\} \rightarrow e = \frac{M}{P} = 24 \text{ cm}$$

$$J_y = J_y = \frac{1}{12} (14 \cdot 32^3 - 12 \cdot 24^3) = 24405,3 \text{ cm}^4$$

$$J_z = J_z = \frac{1}{12} (4 \cdot 26^3 + 28 \cdot 2^3) = 5877,3 \text{ cm}^4$$

Да би израчунали  $J_{yz}$ , поделимо пресек на три правоугаоника ( $J_{yz} = 0$ )

$$J_{yz} = \frac{7}{3} \cdot 14 \cdot \frac{(12 \cdot 4)}{A} + (-7) \cdot (-14) \cdot 12 \cdot 4 = 9408 \text{ cm}^4$$

$$A = 14 \cdot 32 - 12 \cdot 24 = 160 \text{ cm}^2$$

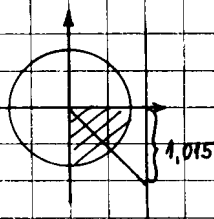
$$J_{1,2} = \frac{24405,3 + 5877,3}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{24405,3 - 5877,3}{2} \right)^2 + 9408^2} = \begin{cases} 28344,8 = J_2 \\ 1937,8 = J_1 \end{cases}$$

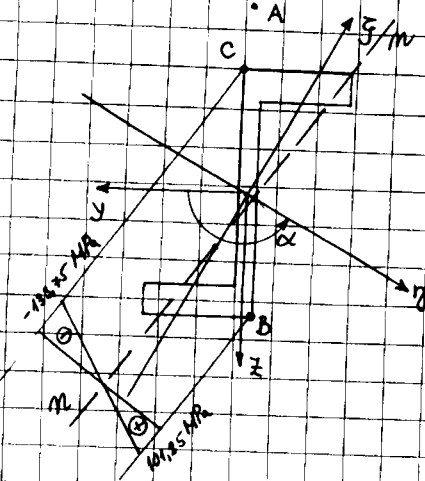
Правци главних оса  $\tan 2\alpha = \frac{-2 J_{yz}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 9408}{24405 - 5877} \rightarrow \sin 2\alpha < 0 \rightarrow -1,015$

$$\alpha = \frac{1}{2} [360^\circ + \arctan(-1,015)] = 157,27^\circ$$

$$\sin \alpha = 0,3862$$

$$\cos \alpha = -0,9224$$





Сада све координате превађујемо у систем  $\eta, \xi$

$$A: \begin{cases} y=0 \\ z=24 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta^A = y \cos \alpha + z \sin \alpha = (-24) \cdot 0,3862 = -9,27 \\ \xi^A = -y \sin \alpha + z \cos \alpha = (-24) \cdot (-0,9224) = 22,14 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{\eta}^2 &= \frac{J_y}{A} = \frac{28344,8}{160} = 177,16 \text{ cm}^2 \\ I_{\xi}^2 &= \frac{J_z}{A} = \frac{1937,8}{160} = 12,11 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} p_{\eta} &= -\frac{\xi^A}{e_{\eta}} = -\frac{22,14}{-9,27} = 1,306 \text{ cm} \\ p_{\xi} &= -\frac{\eta^A}{e_{\xi}} = -\frac{-9,27}{22,14} = -0,42 \text{ cm} \end{aligned} \right\}$$

$$B: \begin{cases} y=-16 \\ z=16 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta^B = (-16)(-0,9224) + 16(0,3862) = 7,10 \\ \xi^B = -(-16)(0,3862) + 16(-0,9224) = -14,37 \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} y=16 \\ z=-16 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta^C = 16(-0,9224) + (-16)(0,3862) = -7,10 \\ \xi^C = -16(0,3862) + (-16)(-0,9224) = -14,37 \end{cases} \quad \text{јер је централно симетрична}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{e_{\eta} \eta}{I_{\eta}^2} + \frac{e_{\xi} \xi}{I_{\xi}^2} \right)$$

$$\sigma_x^A = \frac{-260 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^4} \left( 1 + \frac{-9,27 \cdot 7,10}{12,11} + \frac{22,14 \cdot (-14,37)}{177,16} \right) = 101,25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^C = \frac{-260 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^4} \left( 1 + \frac{-9,27 \cdot (-7,10)}{12,11} + \frac{22,14 \cdot (-14,37)}{177,16} \right) = -133,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x, \max} = 101,25 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_x|_{\max} = 133,75 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_x|_{\max} = 66,875 \text{ MPa}$$

Зад. 2. Постављена сила правоугаоне облика оштређена је централном силом  $P = 100 \text{ kN}$  и моментом завијања  $M_x = 40 \text{ kNm}$ . Просечни максимални нормални напон на контактној линији тешкога и тла (Сидјница тешкога са тлом не може да преноси највише зајезања, уколико дођемо у ситуацију да се највише зајезања у неким тачкама сидјнице одређују такву расцепу највише у области сидјнице која задовољава услове равнотеже)

Решење:

$$e = \frac{M_x}{P} = \frac{40 \text{ kNm}}{100 \text{ kN}} = 0,4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

$$e_y = 40 \text{ cm}$$

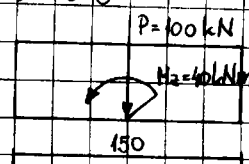
$$e_z = 0$$

$$p_y = -\frac{e_y}{e_{\eta}} = -\frac{40}{40} = -1$$

$$p_z = \frac{e_z}{e_{\xi}} = 0$$

$$\sigma_x^{1-1} = -\frac{100 \cdot 10^3}{1,5} \left( 1 + \frac{40 \cdot (-1)}{1875} \right) = -0,173 \text{ MPa}$$

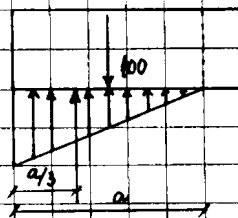
$$\sigma_x^{2-2} = -\frac{100 \cdot 10^3}{1,5} \left( 1 + \frac{40 \cdot (-1)}{1875} \right) = 0,04 \text{ MPa}$$



$$J_z = \frac{1}{12} 100 \cdot 150^3 = 2812,5 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$A = 100 \cdot 150 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

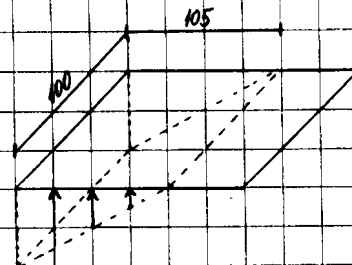
$$I_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{2812,5}{1,5} = 1875 \text{ cm}^2$$



$$\frac{a}{3} = 35 \Rightarrow a = 105 \text{ cm}$$

$$\sigma_x = \frac{2P}{ab} = \frac{2 \cdot 100 \text{ kN}}{1,05 \cdot 1,00}$$

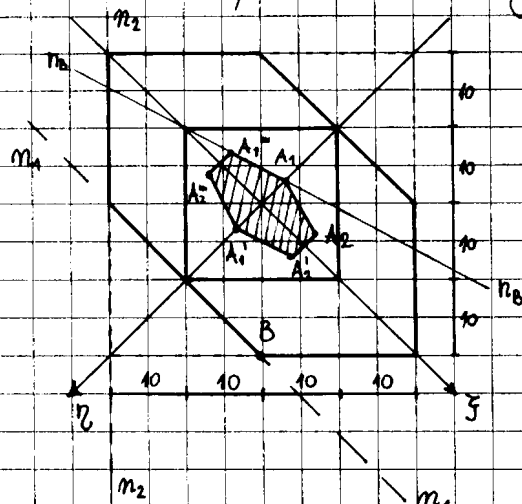
$$\sigma_x = \frac{200}{1,05} \text{ kPa} = 0,19 \text{ MPa}$$



Зад 3. (испитни)

1) Нацртајте језгро пресека

2) Нацртајте неутралну линију ако у тачки В делује ексцентрична сила притиска интензитета 15 kN.



Решење:  $J_{m2}^* - 2J_{m2}^* = \frac{1}{12} \cdot 40^4 - 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 20^4 = 186\,666,6 \text{ cm}^4$

$$J_{m1}^* = J_{m1}^* = \frac{1}{12} (20\sqrt{2})^4 = 53\,333,3 \text{ cm}^4$$

$$A = 40^2 - 2 \cdot 20^2 = 800 \text{ cm}^2$$

$$i_{m2}^2 = \frac{J_{m2}^*}{A} = 233 \text{ cm}^2$$

$$i_{m1}^2 = \frac{J_{m1}^*}{A} = 67 \text{ cm}^2$$

$$m_1 - m_2: \begin{cases} p_2 = 10\sqrt{2} \\ p_3 = \infty \end{cases}$$

$$e_2 = -\frac{i_{m1}^2}{p_2} = -\frac{67}{10\sqrt{2}} = -4,77$$

$$m_2 - m_1: \begin{cases} p_2 = 20\sqrt{2} \\ p_3 = -20\sqrt{2} \end{cases}$$

$$e_2 = -\frac{i_{m1}^2}{p_2} = -\frac{67}{20\sqrt{2}} = -2,35$$

$$e_3 = -\frac{i_{m2}^2}{p_3} = -\frac{233}{-20\sqrt{2}} = 8,24$$

$$B: p_2 = p_3 = \dots$$

$A_2'' - A_1$  секу се  $m_1, m_2'' \Rightarrow A_2'' - A_1$  је неутрална оса

везба бр. 11

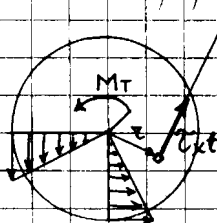
10.12.2007.

Моментаи торзије

$$M_T \neq 0, N, T_y, T_z, M_y, M_z = 0$$

$\Rightarrow$  само торзија  $\Rightarrow$  јављају се само смикуће напони  $\tau_{xt}, \tau_{xt}^*$

Извешћемо формуле за два попречна пресека: кружни и правоугаони.



$\tau_{xt}$  ( $x$  - попречна равина за смикуће напон)  
( $t$  - правац у коме делује напон)

$$\tau_{xt} = \frac{M_T}{J_t} \cdot r$$

$J_t$  - торзиона константа (за кружни п.п.  $J_t = J_p = \frac{1}{2} R^4 \pi$ )

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{J_t} \cdot R = \frac{M_T}{W_T}$$

$W_T$  - ошторни момент при торзији ( $W_T = \frac{J_t}{R} = \frac{1}{2} R^3 \pi$ )

Поред смикуће напона јавља се и деформација.

$$(\tau = G\gamma = G\theta r)$$

$\theta$  - угао торзије (промена угла)

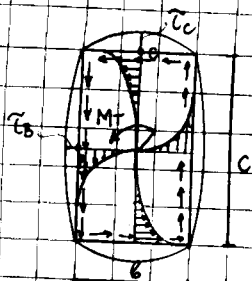
$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M_T}{G J_t}$$

( $G$  - модул клизања)

$\Delta \varphi$  - угао обртања произвољног пресека

$$\Delta \varphi = \int \theta dx = \int \frac{M_T}{G J_t} dx$$

$$\Delta \varphi_{\max} = \frac{M_T l}{G J_t}$$



$$\sigma_b = \frac{M_T}{W_{T,b}} \quad \sigma_c = \frac{M_T}{W_{T,c}} \quad \theta = \frac{M_T}{G J_T}$$

$$J_T = \alpha \cdot b^3 \cdot c \quad [\text{cm}^4]$$

$$W_{T,b} = \beta \cdot b^2 \cdot c \quad [\text{cm}^3]$$

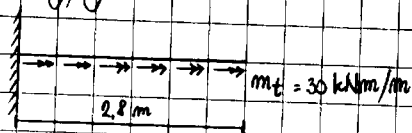
$$W_{T,c} = \gamma \cdot b^2 \cdot c \quad [\text{cm}^3]$$

$b < c$  (увек)

c/b	1	1,5	2	3	6	10
$\alpha$	0,141	0,195	0,229	0,263	0,298	0,312
$\beta$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,298	0,312
$\gamma$	0,208	0,270	0,309	0,355	0,402	0,421

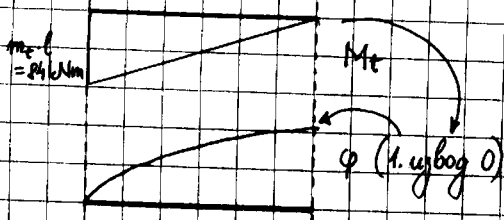
Зад. 1. За конзолни носач оптерећен једнако подељеним моментном теретом израчунајте:

- Одредити  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  у конзоли ако је попречни пресек облика 1-1
- Одредити  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  ако је модул клизања  $G = 80 \text{ GPa}$ .



Решавање:  $\frac{dM_t}{dx} = -m_t \Rightarrow M_t = \int -m_t dx + C_1$

$$\left. \begin{aligned} M_t &= -m_t x + C_1 \\ M_t (x=l) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = m_t l \Rightarrow M_t = m_t (l-x)$$



!  $b$  је крајња страна

$$M_t = 84 \text{ kNm}$$

$$J_T = \alpha \cdot 20^3 \cdot 40 \quad (\text{из таблице } \frac{40}{20} = 2)$$

$$J_T = 0,229 \cdot 20^3 \cdot 40 = 7,3 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

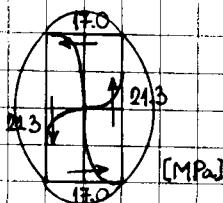
$$W_{T,b} = \beta \cdot b^2 \cdot c = \beta \cdot 20^2 \cdot 40 = 0,246 \cdot 20^2 \cdot 40 = 3,94 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

$$W_{T,c} = \gamma \cdot 20^2 \cdot 40 = 0,309 \cdot 20^2 \cdot 40 = 4,34 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

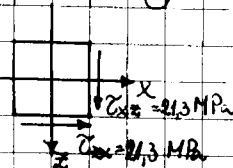
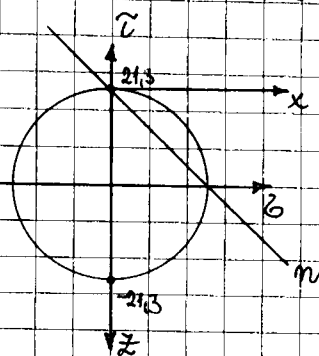
$$\sigma_b = \frac{M_t}{W_{T,b}} = \frac{84 \cdot 10^3}{3,94 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = 21,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{M_t}{W_{T,c}} = \frac{84 \cdot 10^3}{4,34 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = 17,0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \tau_b^{\text{укош}} = 21,3 \text{ MPa}$$



$\sigma_{\max} = \tau_{\max}$  код линејног сличања



8) 2- угао твртине

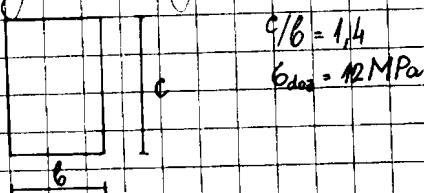
$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t} = \frac{84 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 7,3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^2} = 1,44 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\varphi = \int \theta dx + C_2 = \int \frac{m_t (l-x)}{GJ_t} dx + C_2 = \frac{m_t}{GJ_t} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_2$$

$$\varphi(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\varphi_{\max} = \varphi(x=l) = \frac{m_t}{GJ_t} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{30000 \cdot 2,8^2}{80 \cdot 10^9 \cdot 7,3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^2} = 2,01 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Зад. 2. Конзолни носач оштерен је на крају моментом твртине  $M_t = 240 \text{ kNm}$ . Димензионисати носач ако је правоугаоног попречног пресека односа странеца  $c/b = 7/5$ . За тако димензионисати носач одредити обротање краја конзоле ако је  $G = 80 \text{ GPa}$ .

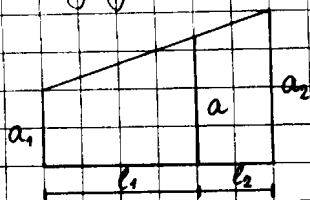


$$c/b = 1,4$$

$$\sigma_{\text{доп}} = 12 \text{ MPa}$$



Решение: Следи  $c/b = 1,4$  немамо у табели, па га добијемо линеарном интерполацијом



$$\alpha(1,4) = \frac{0,4 \cdot \alpha(1,5) + 0,1 \cdot \alpha(1)}{0,5} = \frac{0,4 \cdot 0,185 + 0,1 \cdot 0,141}{0,5} = 0,1842$$

$$\beta(1,4) = \frac{0,4 \cdot 0,234 + 0,1 \cdot 0,208}{0,5} = 0,2264$$

$$\gamma(1,4) = \frac{0,4 \cdot 0,27 + 0,1 \cdot 0,208}{0,5} = 0,2576$$

$$a = \frac{l_1 \cdot a_2 + l_2 \cdot a_1}{l_1 + l_2}$$

Числом множење  $\Rightarrow$  једнак Морсовој крута у 0  $\Rightarrow \tau_{\max} = \sigma_{\max}$

$$\tau_{\max} \leq 12 \text{ MPa} = \sigma_{\text{доп}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_{ts}} \leq 12 \text{ MPa} \Rightarrow W_{ts} \geq \frac{M_t}{12 \text{ MPa}} \Rightarrow \beta \cdot b^2 \cdot c \geq \frac{M_t}{12 \text{ MPa}}$$

$$\beta \cdot 1,4 \cdot b^3 \geq \frac{M_t}{\sigma_{\text{доп}}} \Rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{240 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6 \cdot 1,4 \cdot 0,2264}} = 0,3981 \text{ m}$$

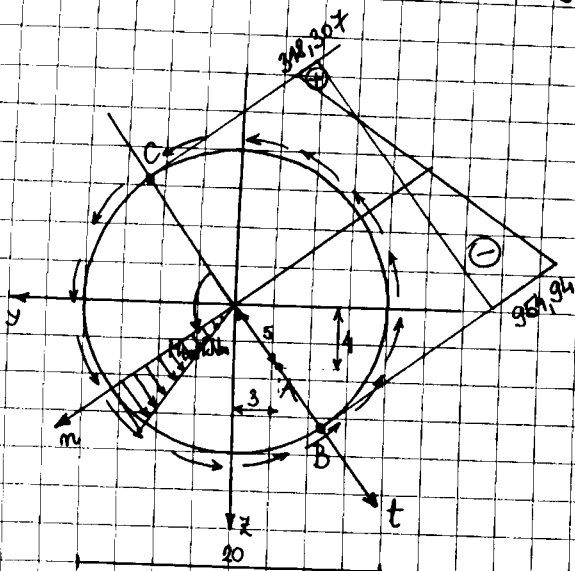
$$b_{\text{исх}} = 0,4 \text{ m} = 40 \text{ cm} \Rightarrow c = 1,4b = 56 \text{ cm}$$

Сада можемо да нађемо све остало.

$$\varphi_{\max} = \frac{M_t \cdot l}{GJ_t} = \frac{240 \cdot 10^3 \cdot 2,7}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,1842 \cdot 40^3 \cdot 56 \cdot 10^{-6}} = 1,226 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Зад. 3. Кружни попречни пресек оштерен је ексцентричном силом применом минималнема  $10 \text{ kN}$  у тачки А и моментом твртине према склони. Одредити  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  и нацртати линзор напона у тачки тачкама у координатном систему  $x, y$ .

Решение: Овај задатак је проблем сложеног напрезања. Представља комбинацију момента торзије и ексцентричног вањског.



$$J_y = J_z = J_D = \frac{1}{4} R^4 \pi = \frac{10^4}{4} \pi = 7853,9 \text{ cm}^4$$

$$\text{кружни пресек } J_y = J_z = \frac{1}{2} R^4 \pi = 15707,93 \text{ cm}^4$$

$$A = R^2 \pi = 10^2 \pi = 314,15 \text{ cm}^2$$

Најједноставније је да израчунамо координатни систем који пролази кроз А.

$$N = 10 \text{ kN} \quad M_m = 0,05 \cdot 10 \text{ kNm} = 0,5 \text{ kNm} \quad M_t = 1 \text{ kNm}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_m}{J_m} \cdot t = \frac{-10000}{314,15 \cdot 10^{-4}} - \frac{500}{7853,9 \cdot 10^{-8}} \cdot t \cdot 10^{-2} \quad (t = \pm 10)$$

$$= -318,319 \text{ kPa} \pm 636,629 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = \frac{M_t}{J_t} \cdot r$$

$$\sigma_{x, \max} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{15707,93 \cdot 10^{-8}} = 636 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x^c = 318,307 \text{ kPa} \quad \sigma_x^b = -954,94 \text{ kPa}$$

$$B: \left. \begin{array}{l} \sigma_x = -954,94 \text{ kPa} \\ \sigma_{xy} = -636 \text{ kPa} \end{array} \right\} S_{xmt} = \begin{bmatrix} -954,94 & -636 & 0 \\ -636 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

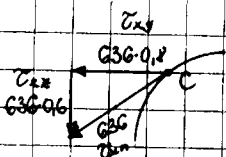
$$\text{заченом вредности } \sigma_{1,2}^* = \frac{-954,94}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-954,94}{2}\right)^2 + 636^2} = \begin{cases} 318 = \sigma_1^B \\ 0 = \sigma_2^B \\ -1273 = \sigma_3^B \end{cases}$$

$$C: \left. \begin{array}{l} \sigma_x = 318,307 \text{ kPa} \\ \sigma_{xy} = 636 \text{ kPa} \end{array} \right\} S_{xmt} = \begin{bmatrix} 318,307 & 636 & 0 \\ 636 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{1,2}^c = \frac{318,307}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{318,307}{2}\right)^2 + 636^2} = \begin{cases} 814,5 \text{ kPa} = \sigma_1^c \\ 0 = \sigma_2^c \\ -496,5 \text{ kPa} = \sigma_3^c \end{cases}$$

$\sigma_{\max} = \sigma_1^c = 814,5$  највећи од свих напон зајемљених  
 $\sigma_{\min} = \sigma_3^b = -1272$  највећи од свих напон притисака

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{x, \max} = 318,307 \\ \sigma_{x, \min} = -954,94 \end{array} \right\} \text{за раван са нормалом } m$$



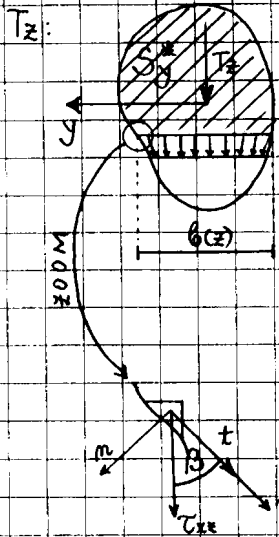
$$S_{xyz}^c = \begin{bmatrix} 318,3 & 636 \cdot 0,8 & 636 \cdot 0,6 \\ 636 \cdot 0,8 & 0 & 0 \\ 636 \cdot 0,6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{xyz}^b = \begin{bmatrix} -954,94 & -636 \cdot 0,8 & -636 \cdot 0,6 \\ -636 \cdot 0,8 & 0 & 0 \\ -636 \cdot 0,6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Механика теорија сабијања Греде

$T_y \neq 0, M_z \neq 0$  - постоји трансверзална сила,  $M_y, T_z, N, M_t = 0$

Као последица постојања јавиће се нормални напон  $\sigma_x = \frac{M_z}{J_y} y$  (или  $z$ )  
( $M_z$  је променљив дуж греде)



Према хипотези Журавског

$$\left. \begin{array}{l} ① \tau_{xz}(z) \\ ② \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(не зависи од } y\text{-координате)} \\ \Rightarrow \tau_{xz}(z) = \frac{T_z \cdot S_y^*}{J_y \cdot b(z)} \end{array}$$

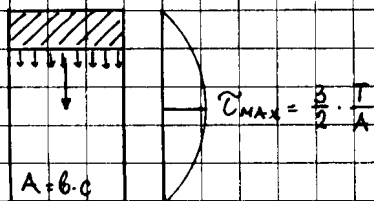
$S_y^*$  - статички момент одсега површине у односу на неутралну осу (осу  $y$ )

$$\tau_{xm} = \tau_{mx} = 0$$

$$\tau_{xt} = \frac{\tau_{xz}}{\cos \beta}$$

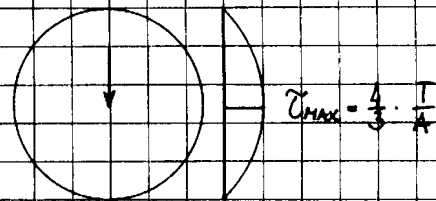
$$\tau_{x, \max} = \frac{\tau_{xz, \max}}{\cos \beta}$$

• правоугаоник



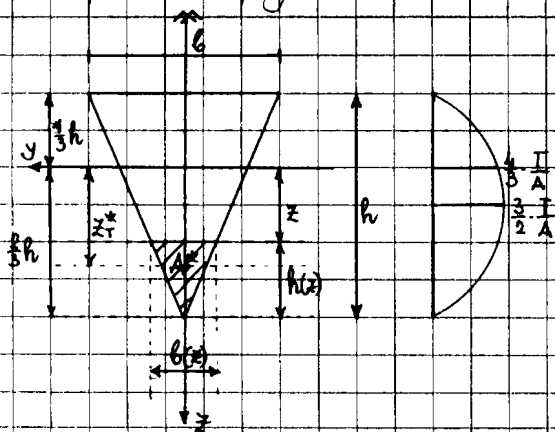
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A}$$

• круг



$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A}$$

• једнакокраки троугао



$$A^* = \frac{1}{2} b(z) \cdot h(z) = \frac{1}{2} b(z) \cdot \left[ \frac{2}{3} h - z \right]$$

$$h(z) = \frac{2}{3} h - z$$

$$z_T^* = z + \frac{1}{3} (h(z)) = z + \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} h - z \right] = \frac{2}{3} z + \frac{2}{9} h$$

$$S_y^* = A^* \cdot z_T^* = \frac{1}{2} b(z) \cdot \left( \frac{2}{3} h - z \right) \cdot \left( \frac{2}{3} z + \frac{2}{9} h \right)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{T S_y^*}{J_y b(z)} = \frac{T \cdot \frac{1}{2} b(z) \cdot \left( \frac{2}{3} h - z \right) \cdot \left( \frac{2}{3} z + \frac{2}{9} h \right)}{\frac{b h^3}{36} \cdot b(z)} \\ &= \frac{T}{A} \cdot 9 \cdot \left( \frac{2}{3} - \frac{z}{h} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{h} + \frac{2}{9} \right) \end{aligned}$$

$$\tau_{xz, \max} = \tau_{xz} \left( z = \frac{h}{6} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A}$$

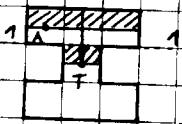
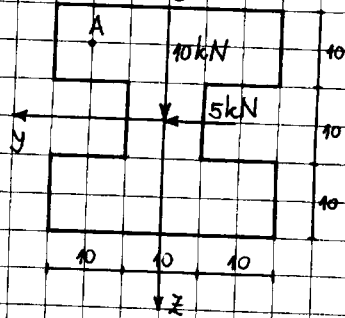
$$\tau_{x, \max} = \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A}$$

Зад. 1. Визначити вбудовані комбіновані напони у латки А та напружений ділянку спину напона у поперечному перерізі.

Решение:  $J_y = \frac{1}{12} (30^4 - 20 \cdot 10^3) = 65833$

$J_z = \frac{1}{12} (20 \cdot 30^3 + 10^4) = 45833$

$\tau = \frac{T_y \cdot S_x^*}{J_y \cdot b}$



$S_{y(A)} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \text{ см}^3$

$S_{yA} = 5 \cdot 30 \cdot 12,5 = 1875 \text{ см}^3$

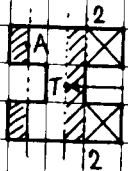
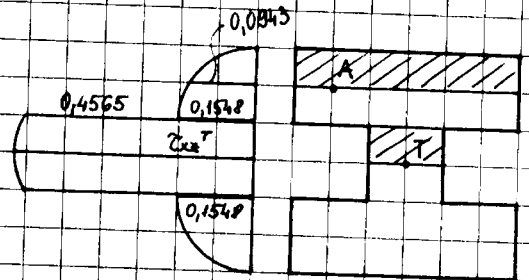
$S_{yT} = S_{y(A)} + 5 \cdot 10 \cdot 2,5 = 3125 \text{ см}^3$

$\tau_{xz}^A = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1875 \cdot 10^{-6}}{65833 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 10^{-2}} = 0,0943 \text{ МПа}$

$\tau_{xz}^{(1-1) \text{ Gore}} = \frac{-11 \cdot 3000}{-11 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0,1518 \text{ МПа}$

$\tau_{xz}^{(1-1) \text{ Dole}} = \frac{-11 \cdot 3125 \cdot 10^{-6}}{-11 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0,4565 \text{ МПа}$

$\tau_{xz}^T = \frac{-11 \cdot 3125 \cdot 10^{-6}}{-11 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0,4747 \text{ МПа}$



$S_{z(2-2)} = 2 \cdot 10^2 \cdot 10 = 2000$

$S_{zT} = S_{z(2-2)} + 5 \cdot 30 \cdot 2,5 = 2375$

$S_{zA} = 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 12,5 = 1250$

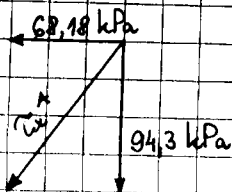
$\tau_{xy}^{(2-2) \text{ Desno}} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 2000 \cdot 10^{-6}}{45833 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 109,9 \text{ kPa}$

$\tau_{xy}^{(2-2) \text{ Levo}} = \frac{-11 \cdot 2375 \cdot 10^{-6}}{-11 \cdot 30 \cdot 10^{-2}} = 72,2 \text{ kPa}$

$\tau_{xy}^T = \frac{-11 \cdot 2375 \cdot 10^{-6}}{-11 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 86,36 \text{ kPa}$

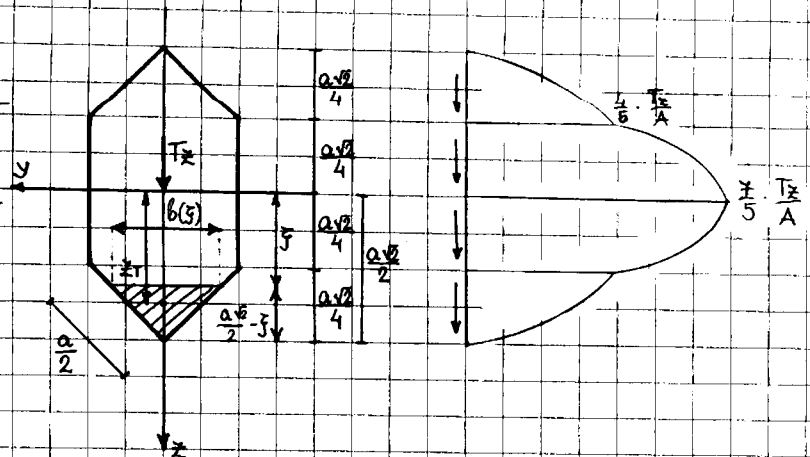
$\tau_{xy}^A = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1250 \cdot 10^{-6}}{-11 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 68,18 \text{ kPa}$

$\tau_y = \frac{T_y \cdot S_x^*}{J_y \cdot b(y)}$



$\tau_x^A = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = 116,8 \text{ kPa}$

Зад. 2. За заданих поперечних перерізів, які є з'ясовані у вигляді трансверсальних сил, напружений ділянку спину напона, сформулювати існуючі напруження.



$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S_y^*}{J_y \cdot b(z)}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{4} < \xi < \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\xi_T = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} - \xi \right) = \frac{1}{6} (4\xi + a\sqrt{2})$$

$$J_y = \frac{1}{12} \left( a^4 - \left( \frac{a}{2} \right)^4 \right) = \frac{15}{16} \cdot \frac{a^4}{12}$$

$$S_y^* = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot b(\xi) \cdot \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} - \xi \right)}_p \cdot \underbrace{\frac{1}{6} (4\xi + a\sqrt{2})}_{\xi_T}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot \frac{1}{2} b(\xi) \cdot \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} - \xi \right) \cdot \frac{1}{6} (4\xi + a\sqrt{2})}{\frac{15}{16} \cdot \frac{a^4}{12} \cdot b(\xi)} = \frac{T_z \cdot \frac{4}{3a^2} \cdot \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} - \xi \right) (4\xi + a\sqrt{2})}{\text{(квадратна ф-ја по } \xi)}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \xi} = 0 \Leftrightarrow -(4\xi + a\sqrt{2}) + \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} - \xi \right) \cdot 4 = 0 \Rightarrow \xi = \frac{a\sqrt{2}}{8} \left( \notin \left[ \frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{2} \right] \right) \Rightarrow \text{нема лок макс.}$$

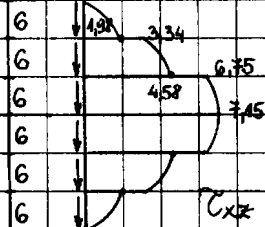
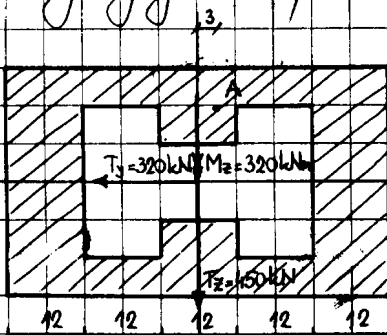
$$\tau_{xz} \left( \xi = \frac{a\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{T_z}{A}$$

Како се одмишмо,  $S_y^*$  се повећава

$$S_{y, \max}^* = \left( \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}_{A_T} \cdot \underbrace{\left( \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \right)}_{\xi_T} \right) + \left( \underbrace{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}_{A_T} \right) \cdot \underbrace{\frac{a\sqrt{2}}{8}}_{\xi_T} = \frac{7}{96} \sqrt{2} a^3$$

$$\tau_{xz, \max} = \tau_{xz} (\xi=0) = \frac{T_z \cdot \frac{7}{96} \sqrt{2} a^3}{\frac{15}{16} \cdot \frac{a^4}{12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{T_z}{A}$$

Зад. 3. (поинтинг) За задати пресек и силе у пресеку нацртаним дијаграмом компоненталних напона и за тачку А у пресеку извршити по Морсовој кружа анализу стања напона (одредити вредности и правце главних напона и максималан сжиљени напон).



Решение:  $\tau_{xy} = \frac{T_y}{J_x} \cdot \frac{S_z^*}{b(y)}$

$$J_x = 5,564 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 2,039 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

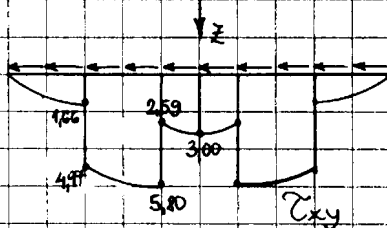
$$A = 1,44 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = 1,725 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

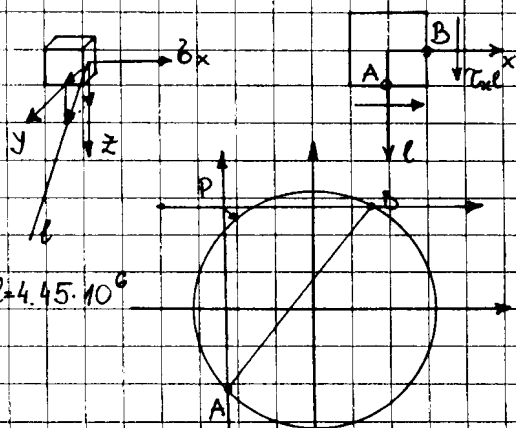
$$\sigma_{\min} = 1,725 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\tau_{xy}^* = 2,98 \cdot 10^4$$

$$\tau_{xz}^* = 3,34 \cdot 10^6$$



$$S^* = \begin{bmatrix} 1,72 & 2,98 & 3,31 \\ 2,98 & 0 & 0 \\ 3,31 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \lg 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_1^* = 5,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 4,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2^* = 3,6 \text{ MPa}$$

$$\alpha_1 = 50^\circ$$

уток  
средњи  
напон  
нула

# Мор - Маквелова аналогја

$$\begin{aligned} w' &= \varphi \quad (= \tan \varphi = \frac{dw}{dx}) \\ \varphi' &= (w'(x)) = - \frac{M_y(x)}{E \cdot J_y(x)} \end{aligned}$$

$w(x)$  - примерне пруживане тачке на оси греде у правцу  $z$ -осе  
 $M_y(x)$  - моменти савијања око  $y$ -осе на месту  $x$ , при чему су  $y$  и  $z$  главне осе инерције покретног пресека

Ордината  $w$  еластичне линије назива се уједно греда, а тачка поменута на еластичној линији је тачка греде.

М.м.а представља одређивање угиба и нагиба методом ф. носила

$EJ_y \cdot w'' = -M_y(x)$  - диференцијална једначина еластичне линије греде

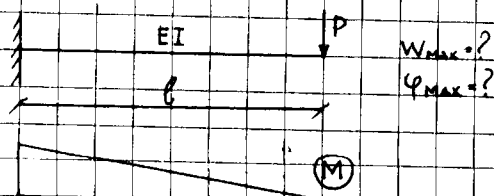
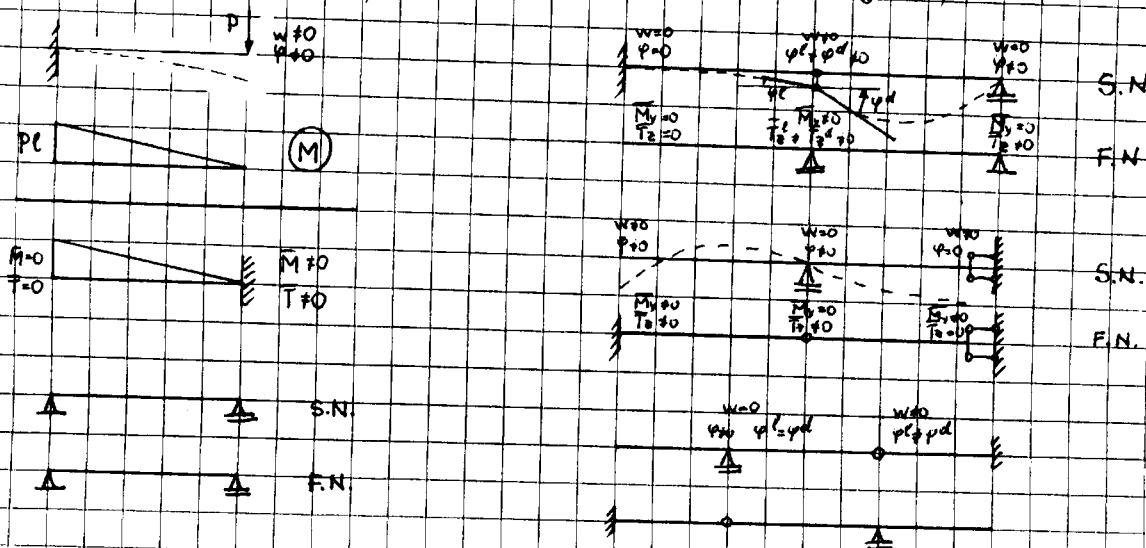
Множењем уоквирених једначина са константом  $EJ_y$ , коју називамо уједно крутином греде на савијање око  $y$ -осе, добијемо

$$(EJ_y \cdot w)' = EJ_y \cdot \varphi \quad (EJ_y \cdot \varphi)' = -M_y(x) \cdot \frac{J_y}{J_y(x)} \quad M_y' = T_z \quad T_z' = -Q_z$$

Ако величину  $Q_z(x) = M_y(x) \cdot \frac{J_y}{J_y(x)}$  записати као фиктивно расподелено оптерећење греде, тада су одговарајући фиктивни моменти и трансверзална сила

$$\begin{aligned} M_y &= EJ_y \cdot w \Rightarrow w = \frac{M_y}{EJ_y} \\ T_z &= EJ_y \cdot \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{T_z}{EJ_y} \end{aligned}$$

Саварни носач  $\rightarrow$  фиктивни носач  $(\Leftrightarrow) \quad w \rightarrow M_y, \quad \varphi \rightarrow T_z$



$$\varphi = \frac{1}{2} P \cdot l = \frac{1}{2} P l^2$$

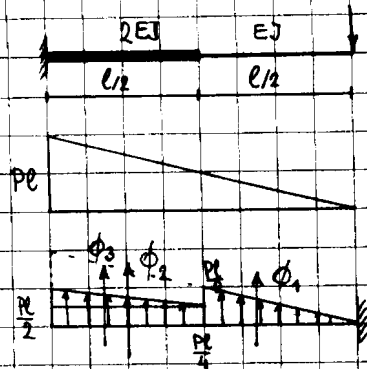
$$T_z = +\varphi = \frac{1}{2} P l^2$$

$$\varphi_{\max} = \frac{T_z}{E \cdot J_y} = \frac{P l^2}{2 E J_y}$$

$$M = \varphi \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} P l^2$$

$$w_{\max} = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{E J_y}$$

Када записујемо доња израза подјеливајући се означава као променљива



$$q = M \cdot \frac{1}{J_0}$$

$$J_0 = J, EJ_0 = EJ$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{8}$$

$$\phi_2 = \frac{p}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{8}$$

$$\phi_3 = \frac{p}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{pl^2}{16}$$

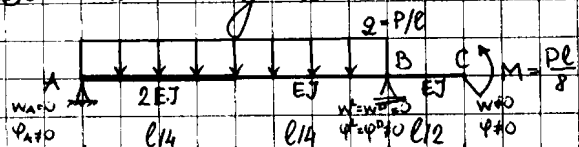
$$\bar{T}_0 = \sum \phi_i = \frac{5}{16} pl^2 \Rightarrow \varphi_{max} = \frac{5}{16} \cdot \frac{pl^2}{EJ}$$

$$M_0 = \phi_1 \cdot \frac{l}{3} + \phi_2 \cdot \frac{3}{4} l + \frac{5}{16} \phi_3 l = \frac{3}{16} pl^3 \Rightarrow w_{max} = \frac{3}{16} \cdot \frac{pl^3}{EJ}$$

Површина лука

$$P = \frac{2}{3} \cdot f \cdot l$$

Зад. 1. За носач приказан на слици приложеном Морове аналогije одредити уједно и наћи у тачки С.



$$P = 200 \text{ kN}$$

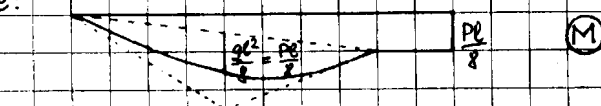
$$l = 4 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$J = 240000 \text{ m}^4$$

$$EJ = 44,1 \text{ MNm}^2$$

Решение:

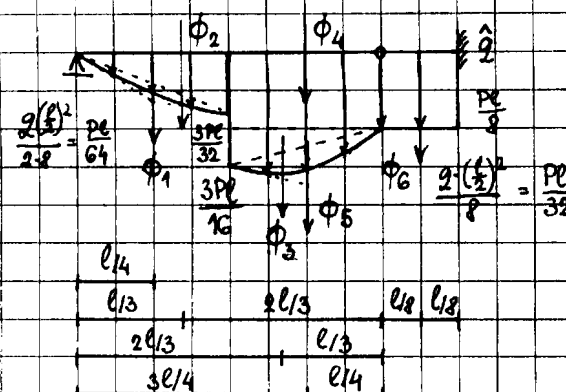


$$\hat{M} = 0$$

$$\hat{Q} = M \frac{EJ_0}{EJ}$$

фиктивни носач

$$1. EJ = EJ_0$$



$$\phi_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{64} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{192}$$

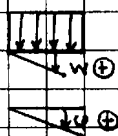
$$\phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3p}{32} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3pl^2}{128}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{16} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{64}$$

$$\phi_4 = \frac{p}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{16}$$

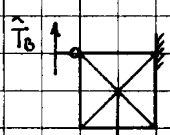
$$\phi_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{32} \cdot \frac{l}{2} = \frac{pl^2}{96}$$

$$\phi_6 = \frac{p}{8} \cdot \frac{l}{4} = \frac{pl^2}{32}$$



сиремце увек од носача ка десетрафи

$$\hat{T}_B = -\frac{1}{l} [\phi_1 \cdot \frac{l}{4} + \phi_2 \cdot \frac{l}{3} + \phi_3 \cdot \frac{2l}{3} + (\phi_4 + \phi_5) \cdot \frac{3l}{4}]$$

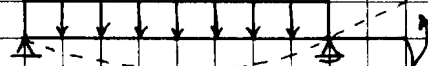


$$\hat{T}_C = \hat{T}_B - \phi_6 \quad p = 200 \text{ kN} \quad l = 4 \text{ m}$$

$$\hat{M}_0 = \hat{T}_B \cdot \frac{l}{4} - \phi_6 \cdot \frac{l}{8} = -287,5 \text{ kNm}^3$$

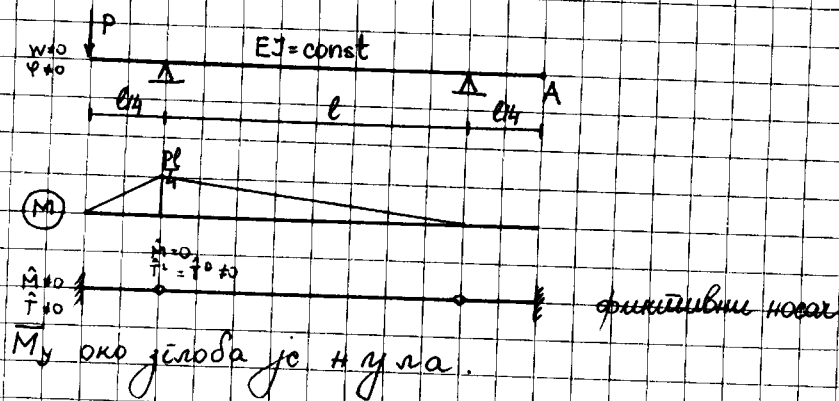
$$\varphi_C = \frac{\hat{T}_C}{EJ_0} = \frac{-337,5 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{rad} \cdot \text{m}^2}{44,1 \cdot 10^6 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2} = -7,653 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$w_C = \frac{\hat{M}_0}{EJ_0} = \frac{-287,5 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^3}{44,1 \cdot 10^6 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2} = -6,519 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Зад. 2. Одредити угиб и напон у напни А.

Решење:



$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{Pl^2}{8}$$

$$\hat{M}_A = \frac{Pl^2}{24} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl^3}{96}$$

$$w_A = \frac{\hat{M}_A}{EI} = \frac{Pl^3}{96EI}$$

$$\hat{T}_A = \frac{Pl^2}{24}$$

$$\varphi_A = \frac{\hat{T}_A}{EI} = \frac{Pl^2}{24EI}$$

везба бр. 13

24.12.2007.

Извучање предног носача

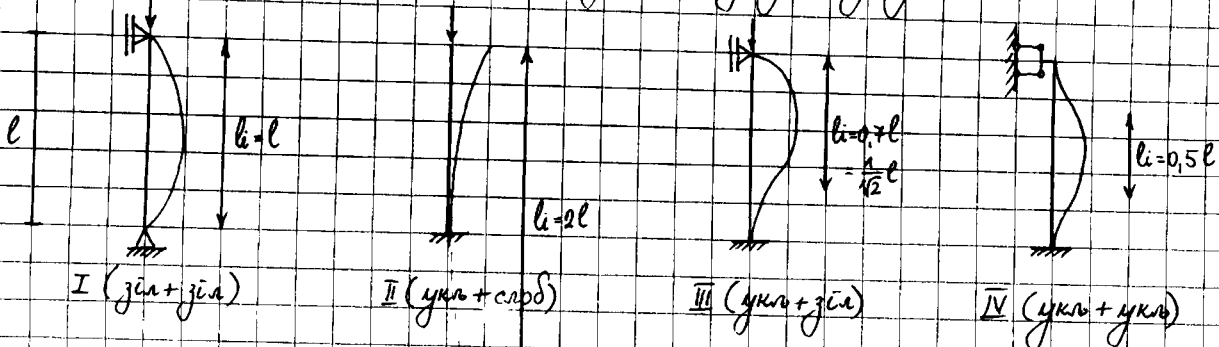
Веза је за праме критичне силе која зависи само од граничних услова, иј. напона осовњана бресе.



$$\sigma_{крт} \cdot A = 240 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot 10^{-6} = 1694,4 \text{ N} = 1,6944 \text{ kN} \approx 169 \text{ kr}$$

(кр-килопонг : сила корм 1kg делује на доле)

Последице 4 карактеристична (Ојлер) случаја извучања



$$P_{кр} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l_i^2}$$

$$P_{кр, y} = \pi^2 \cdot \frac{EI_y}{l_{y,i}^2}$$

$$P_{кр, z} = \pi^2 \cdot \frac{EI_z}{l_{z,i}^2}$$

$l_i$  - слободна дужина извучања

у и з су главне центричне осе инерције

Нормални напон који одговара критичној сили извијања је критичан напон изв.

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} \quad \lambda - \text{вештосић гресе} \quad \lambda_y = \frac{l_y}{i_y}, \quad \lambda_z = \frac{l_z}{i_z}$$

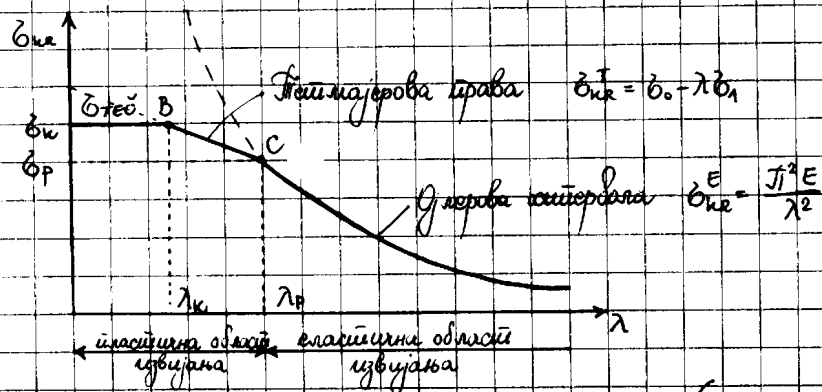
$$2R = 3 \text{ mm} \quad \sigma_{кр} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} \quad E = 210 \text{ GPa}$$

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{R^4 \pi}{4} \\ A &= R^2 \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow i^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow i = \frac{R}{2} \quad i = \frac{3 \text{ mm}}{2} = 1,5 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{70 \text{ cm}}{1,5 \text{ mm}} = \frac{700 \text{ mm}}{1,5 \text{ mm}} = 933$$

$$\sigma_{кр} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = 3,14^2 \cdot \frac{210 \cdot 10^3}{933^2} = 2,38 \text{ MPa}$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 2,38 \cdot 10^6 \cdot 7,06 \cdot 10^{-6} = 16,6 \text{ N} \approx 1,66 \text{ kP}$$



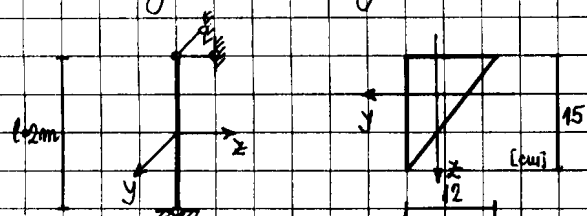
$$\sigma_{кр} = \min \left\{ \begin{aligned} &\sigma_{кр}^E \\ &\sigma_{кр}^T \\ &\sigma_{кр}^G \end{aligned} \right\}$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$$

$$P_{доп} = \frac{P_{кр}}{n_s}, \quad n_s > 1$$

( $n_s$  - коефицијент сигурности на извијање)

Зад. 1. За слободно ослоњен метални правоугаони пресека израчунајте одређени критичну силу извијања  $P_{кр}$  и одредите да ли је извијање у еластичној или у пластичној области.



$$E = 10 \text{ GPa}$$

$$\sigma_T = 27,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{кр} = 29 - 0,194 \lambda \text{ [MPa]}$$

$$\text{Решење: } \left. \begin{aligned} J_y &= \frac{1}{36} \cdot 12 \cdot 15^3 = 1125 \text{ cm}^4 \\ J_z &= \frac{1}{36} \cdot 15 \cdot 12^3 = 720 \text{ cm}^4 \\ J_{yz} &= + \frac{1}{4} \cdot 15^2 \cdot 12^2 = 450 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right\} J_{1,2} = \frac{1125 + 720}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1125 - 720}{2}\right)^2 + 450^2} = 429$$

$$A = \frac{12 \cdot 15}{2} = 90 \text{ cm}^2 \Rightarrow i_{\min}^2 = \frac{J_{\min}}{A} = \frac{429}{90}$$

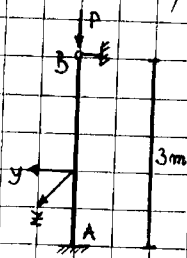
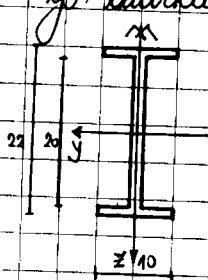
$$l_i = l = 2 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} i_{\min} &= \sqrt{\frac{429 \text{ cm}^4}{90 \text{ cm}^2}} = 2,18 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \lambda_{\max} = \frac{200 \text{ cm}}{2,18 \text{ cm}} = 91,7$$

$$\sigma_{кр} = \min \left\{ \begin{aligned} &\pi^2 \cdot \frac{10000 \text{ MPa}}{91,7^2} = 11,7 \\ &29 - 0,194 \cdot 91,7 = 11,2 \\ &27,5 \end{aligned} \right\} = 11,2 \text{ MPa}$$

$$N_{кр} = 11,2 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^{-4} = 100,8 \cdot 10^3 = 100,8 \text{ kN}$$

- Зад. 2. Шталав АВ дужине 3m укљешћен је у тачки А док је у тачки В слободно померање у правцу у-осе
- а) Одредити силу притиска коју штала може да прими са коефицијентом сигурности  $m_s = 2$
- б) Одредити да ли ће се променити носивост ако се уклони ослонац у тачки В.



$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{\text{кр}}^I = 310 - 1,14 \lambda \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_T = 240 \text{ MPa}$$

Решење:

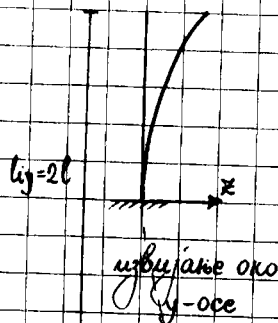
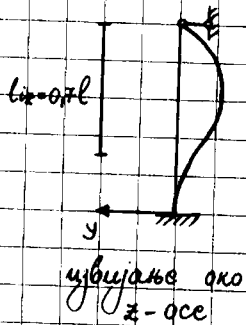
$$J_y = \frac{1}{12} (10 \cdot 22^3 - 9 \cdot 20^3) = 2873,77 \text{ cm}^4$$

$$J_z = \frac{1}{12} (2 \cdot 10^3 + 20 \cdot 1^3) = 168,33 \text{ cm}^4$$

$$A = 22 \cdot 10 - 9 \cdot 20 = 40 \text{ cm}^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{2873,77}{40}} = 8,46 \text{ cm}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{168,33}{40}} = 2,05 \text{ cm}$$



$$\lambda_y = \frac{l_{ky}}{i_y} = \frac{2 \cdot 300}{8,46} = 70,79$$

$$\lambda_z = \frac{l_{kz}}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 300}{2,05} = 102,37$$

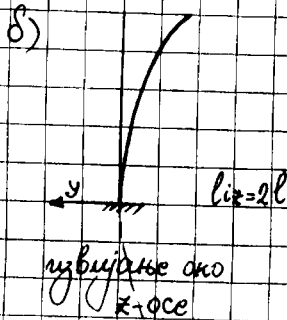
$$\lambda_{\text{max}} = \lambda_z = 102,37$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{мин}} = \begin{cases} \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = 3,14^2 \cdot \frac{200000 \text{ MPa}}{102,37^2} = 188,24 \\ \sigma_{\text{кр}}^I = 310 - 1,14 \cdot 102,37 = 193,31 \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{кр}} = 188,24 \text{ MPa}$$

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = 188,24 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-4} = 752,8 \text{ kN}$$

$$P_{\text{доп}} = \frac{P_{\text{кр}}}{m} = \frac{752,8}{2} = 376,4 \text{ kN}$$



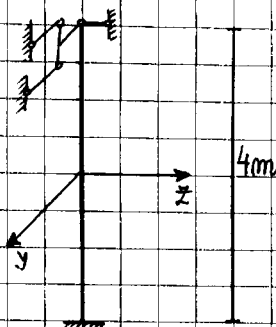
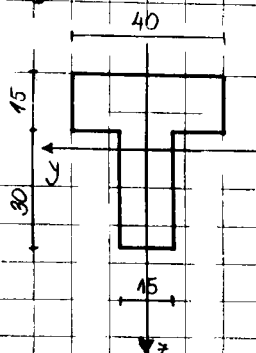
$$\lambda_z^* = \frac{600}{2,05} = 292,685$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \min \left\{ \begin{aligned} \sigma_{\text{кр}}^E &= 3,14^2 \cdot \frac{200000 \text{ MPa}}{292,685^2} = 23,019 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{кр}}^I &= 310 - 1,14 \cdot 292,685 = 193,31 \end{aligned} \right.$$

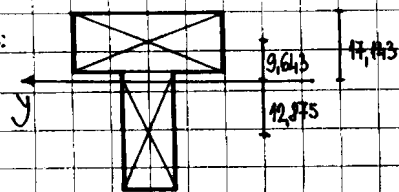
$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = 23,019 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-4} = 92,076 \text{ kN}$$

$$P_{\text{доп}} = \frac{1}{2} P_{\text{кр}} = 46,038 \text{ kN}$$

- Зад. 3. (последица) За дајени пресек и облик штала одредити критичну силу притиска ако је  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{\text{кр}}^I = 310 - 1,2 \lambda \text{ [MPa]}$  и  $\sigma_T = 200 \text{ MPa}$



Решение:



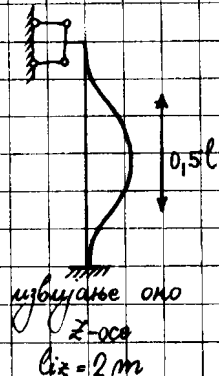
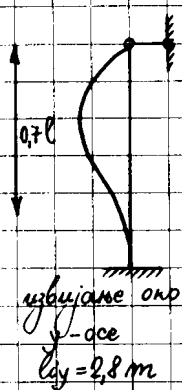
$$Z_1 = \frac{7.5 \cdot (7.5 \cdot 10) \cdot 40 + 30 \cdot 15 \cdot 30}{15(40+30)} = 17.143$$

$$J_y = \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 15^3 + 9.643^2 \cdot 15 \cdot 40 + \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 30^3 + 12.875^2 \cdot 15 \cdot 30$$

$$= 175178 \text{ см}^4, \quad J_z = \frac{1}{12} (15 \cdot 40^3 + 30 \cdot 15^3) = 88437.5$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{175178}{1050}} = 12.92 \text{ см} \Rightarrow \lambda_y = \frac{l_y}{i_y} = \frac{2.8 \cdot 100}{12.92} = 21.89 \text{ см}$$

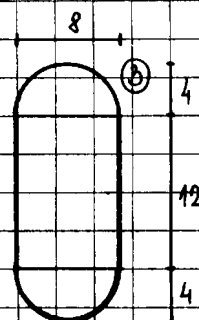
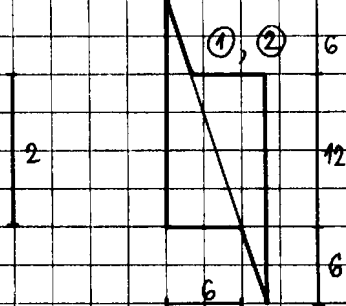
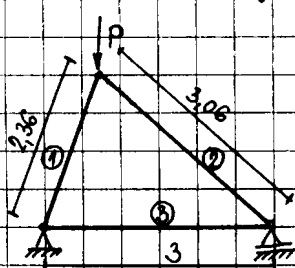
$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{88437.5}{1050}} = 9.18 \text{ см} \Rightarrow \lambda_z = \frac{l_z}{i_z} = \frac{200}{9.18} = 21.79 \text{ см}$$



$$\lambda_{max} = \lambda_y$$

$$P_{crit} = \Phi_{crit} \cdot A = 200 \cdot 10^6 \cdot 1050 \cdot 10^{-4}$$

Зад. 4. (испийни задатак) Одредити да ли је за сигурности на увијање штамова дајтег система (нейбоовније) ако рама спољашња сила  $P$  има приказан смер или смер супротан од приказаног. За нейбоовнију случај одредити највећу вредност силе  $P$  при којој коефицијент сигурности на увијање износи  $n_s \geq 3.5$ .



$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{cr} = 310 - 1.14 \lambda$$

$$\sigma_T = 240 \text{ MPa}$$

Решение:

$$|S_1| = 0.838 P$$

$$|S_2| = 0.4507 P$$

$$|S_3| = 0.375 P$$

$$J_{min} = 671.57$$

$$A = 108.06$$

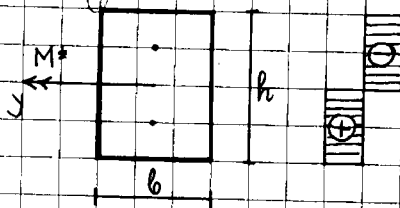
$$i_{min} = 2.3 \text{ см}$$

$$\lambda_{max} = \dots$$

# Еласто-пластично савијање греде

Гранични моментни савијања неких карактеристичних поперечних пресека

• правоугаоник

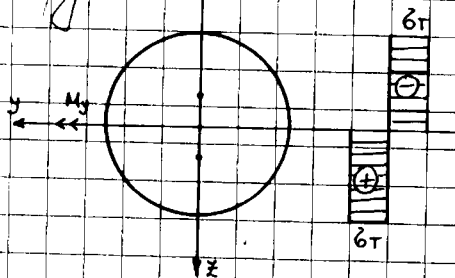


$$M_y^* = W_y^* \cdot \delta_T = 2 \cdot \left(b \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{4} \cdot \delta_T$$

$$M_y^* = \frac{bh^2}{4} \cdot \delta_T$$

$$f_y = \frac{W_y^*}{W_y} = 1,5$$

• круг



$$M_y^* = W_y^* \cdot \delta_T = 2 \cdot \left(\frac{R^2 J}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{J} \cdot \delta_T$$

$$M_y^* = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \delta_T$$

$$f_y = \frac{W_y^*}{W_y} = \frac{16}{3\pi} = 1,698$$

У граничном стању када је читав поперечни пресек еластично деформиран, неутрална оса  $m^*-m^*$  поклапа се са бисектрисом поперечног пресека, чији део пресека на два дела једнаких површина.

$$M_y^* = W_y^* \cdot \delta_T$$

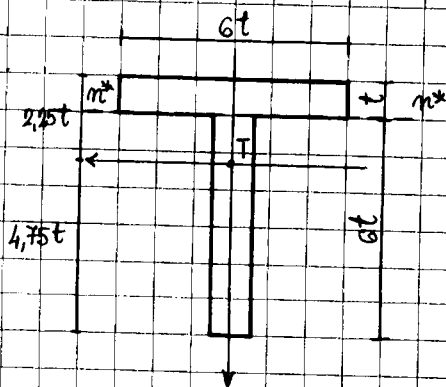
$$W_y^* = S_1^* + S_2^*$$

- еластични отпорни момент  
( $S_1^*$  и  $S_2^*$  су статички моментни површина  $F_1$  и  $F_2$  (у апсолутним вредностима) у односу на неутралну осу  $m^*-m^*$ )

$$f_y = \frac{W_y^*}{W_y} = \frac{M_y^*}{M_y^*} \left( = \frac{W_y^* \delta_T}{W_y \delta_T} \right)$$

- коефицијент облика поперечног пресека при савијању (карактеристика попр. пресека)  
( $W_y = \frac{J}{z_{max}}$ ;  $M_y^*$  - момент савијања на крају тешка)

Зад. 1



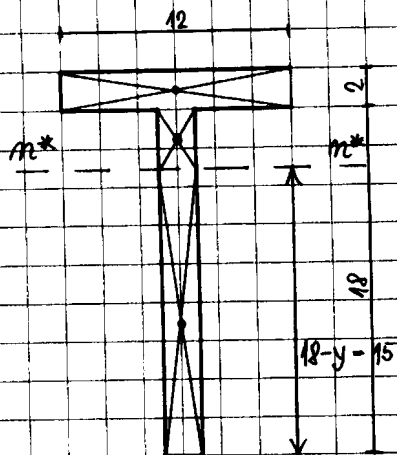
$$\text{Решенје: } M^* = W_y^* \cdot \delta_T = S_{pl} \cdot \delta_T$$

$$W_y^* = S_{pl} = (6t \cdot t) \cdot 0,5t + (6t \cdot t) \cdot 3t$$

$$W_y^* = 21t^3$$

$$M^* = 21t^3 \cdot \delta_T$$

Заг. 2.



Решение:

$$A_1 = 12 \cdot 2 = 24$$

$$A_2 = 18 \cdot 2 = 36$$

$$\Rightarrow A = 60 \Rightarrow A/2 = 30$$

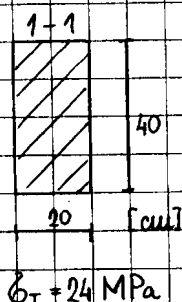
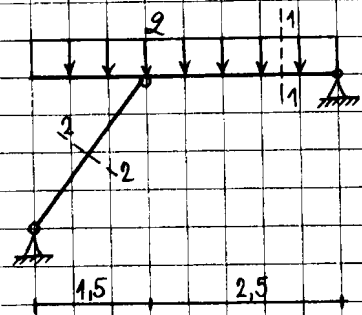
$$12 \cdot 2 + 2 \cdot y = (18 - y) \cdot 2 \Rightarrow y = 3$$

$$W_y^* = S_{pl} = (12 \cdot 2) \cdot 4 + (3 \cdot 2) \cdot 1,5 + (15 \cdot 2) \cdot 7,5$$

$$W_y^* = 330 \text{ см}^3$$

$$M^* = 330 \text{ ЪТ}$$

Заг. 3.



2-2

$\otimes$

$R = 4 \text{ см}$

$\sigma_T = 240 \text{ МПа}$

$q^T = ?$

$q^* = ?$

Решение:

$q^T$  - интензитетът на опънване на краищата

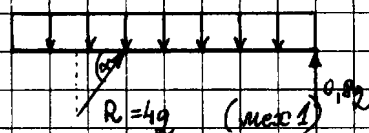
$q^*$  - гранична вредност на опънване

$N^*, N^T, M^*, M^T$

$$(1-1): M^T = W_y^{ef} \cdot \sigma_T = \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 40^2 \cdot 10^{-6} \cdot 24 \cdot 10^6 = 128 \text{ кНм}$$

$$M^* = W_y^* \cdot \sigma_T = \frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 40^3 \cdot 10^{-6} \cdot 24 \cdot 10^6 = 192 \text{ кНм}$$

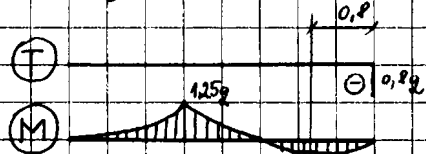
$$(2-2): N^* = N^T = \frac{\pi^2}{4} \cdot 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^6 = 1206 \text{ кН}$$



$$R \cdot 0,8 \cdot 2,5 - (q \cdot 4) \cdot 2 = 0$$

$$R = 4q$$

Интензитетът на опънване на краищата намираме из условия  $M_{y, \max} = M_y^T$



$$0,8q - qx = 0, \quad x = 0,8, \quad T = 0$$

$$\max M = 0,8 \cdot q \cdot 0,8 - \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot q = 0,32q$$

$$M^T = \max |M| = 1,125q^T = 128 \Rightarrow q^T = 114 \text{ кН/м}$$

$$N^T = 4q^T = 1206 \text{ кН}$$

$$\sigma_{\max}^T \left\{ \begin{matrix} 114 \\ 301,6 \end{matrix} \right\} = 114 \text{ кН/м}$$

Гранична вредност на опънване намираме из условия  $M_{y, \max} = M_y^*$

$$\max |M| = 1,125q^* = M^* = 192 \text{ кНм} \Rightarrow q^* = 170,7 \text{ кН/м}$$

$$N_{\max} = 4q^* = N^* = 1206 \text{ кН} \Rightarrow q^* = 301,6 \text{ кН/м}$$

$$q^* = \min \left\{ \begin{matrix} 170,7 \\ 301,6 \end{matrix} \right\} = 170,7 \text{ кН/м}$$

ЛЮБОМИР/06